

DM n° 1

**N. B. :** Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible.

Exercice 1

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. a) Calculer  $A^2, A^3$  puis  $A^3 - 4A^2 + 5A$ .  
 b) En déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $I_3, A$  et  $A^2$ .  
 c) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, retrouver le résultat précédent.
2. Justifier que la matrice  $A - 2I_3$  n'est pas inversible et résoudre l'équation  $AX = 2X$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .
3. On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . En résolvant un système, démontrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
4. Vérifier que la matrice  $T = P^{-1}AP$  est triangulaire supérieure, puis démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$ .
5. a) On pose  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $N^2$  puis en déduire, pour tout  $k \geq 2$ ,  $N^k$ .  
 b) À l'aide de la formule du binôme, déterminer alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $T^n$ .  
 c) Par quelle autre méthode aurait-on pu déterminer  $T^n$ ?  
 d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déduire des questions précédentes l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

Exercice 2

1. Résoudre les systèmes suivants :  $(S_1) \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y + z = 2 \\ 5x - 3y + z = 1 \end{cases}$  et  $(S_2) \begin{cases} 2x + 5y + 3z + t = 0 \\ -x + 2y + z - t = 0 \\ 7x + 4y + 3z + 5t = 0 \\ x + 7y + 4z = 0 \end{cases}$ .
2. Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$(S) \begin{cases} y + z = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ x + y = \lambda z \end{cases}.$$

Exercice 3

On considère les vecteurs  $v_1 = (1, 4, 1)$  et  $v_2 = (-1, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 5z = 0\}$ . Les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent-ils à  $F$ ?
2. Soit  $G = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$  avec  $u_1 = (1, -1, -1)$  et  $u_2 = (-6, 1, 4)$ . Les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent-ils à  $G$ ?
3. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Montrer que  $G \subset F$ .