

DM n° 2

N. B. : Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible.

Exercice 1 Les quatre questions sont indépendantes

1. Montrer que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est équivalente à la matrice unité I_n , mais que la seule matrice semblable à I_n est I_n .

2. Déterminer le rang et la trace des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices sont-elles équivalentes ? semblables ?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $f(e'_1) = 2e'_1$, $f(e'_2) = 0$ et $f(e'_3) = e'_1 - e'_2$.

b) En déduire que A est semblable à une matrice B triangulaire supérieure. Quelle égalité relie A et B ?

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel qu'il existe $(u, v) \in (\mathbb{R}^4)^2$ vérifiant : $u \neq 0$, $v \neq 0$, $f(u) = v$, $f(v) = -u$ et $\text{rg}(f) = 2$. On note A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

a) Montrer que (u, v) est une base de $\text{Im}(f)$ et que : $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

b) Montrer qu'en complétant la famille (v, u) à l'aide des vecteurs d'une base de $\text{Ker}(f)$ on

obtient une base de $\mathbb{R}^4$ et en déduire que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme non nul de E tel que :

$$f^3 + f = 0 \quad \text{et} \quad f^2 + \text{Id}_E \neq 0$$

où $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

1. Vérifier que $(f^2 + \text{Id}_E) \circ f = 0$.

2. Montrer que :

a) $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \{0_E\}$

b) $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$

c) $u \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) \iff f^2(u) = -u$.

d) $\forall x \in E, \exists !(y, z) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E), x = y + z$ (on pourra raisonner par analyse-synthèse)

3. On suppose désormais que $\dim E = 3$. On note u un vecteur non nul de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.

a) Montrer qu'il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \alpha u$. En déduire que $(u, f(u))$ est une famille libre de vecteurs de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.

b) Montrer que $\dim \text{Ker}(f) = 1$ et $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = 2$ (on pourra raisonner par l'absurde).

c) Soit $v \in \text{Ker}(f)$ avec $v \neq 0_E$. Montrer que $(v, u, f(u))$ est une base de E .