DM n° 3

N. B. : *Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible.*

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \,;\, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n + 2. \end{cases}$

On définit également la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmético-géométrique.

2. Déterminer alors l'expression de v_n en fonction de n.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

4. Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n et déterminer la nature et la limite éventuelle de (u_n).

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$.

1. Déterminer les trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire.

2. En remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n et u_0, puis étudier la nature de (u_n) et sa limite éventuelle.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis établir que : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$.

2. Démontrer qu'il existe un unique réel $a \in [0;1]$ tel que $f(a) = a$ et le déterminer, puis établir que : $\dfrac{1}{4} < a < \dfrac{1}{2}$.

3. Représenter l'allure de la courbe de f sur $[0;1]$ ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?

4. Résoudre l'équation $f \circ f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;1]$.

5. a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1} \leqslant a \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant 1$.

   b) Justifier que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. On notera ℓ et ℓ' leurs limites respectives.

   c) Démontrer que $\ell = 1$, puis établir que : $\ell' = f(\ell)$. En déduire la valeur de ℓ'.

6. Que peut-on déduire des questions précédentes quant à la suite (u_n) ?