

DM n° 4

N. B. : Essayez de soigner la rédaction en la rendant la plus concise et précise possible.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Déterminer son ensemble de définition, noté $\mathcal{D}_f$.
2. Comparer $f(-x)$ et $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de variation complet de f .

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer les limites en $+\infty$, 0 et 1^- .
3. Démontrer que, pour tout réel $u > -1$, $\ln(1+u) \leq u$.
4. Déterminer la limite de $ue^{\frac{1}{u}}$ en 0 à droite.
5. En utilisant 3. et 4., calculer la limite de f en 1 à droite.
Peut-on prolonger f par continuité de f en 1 ? en 0 ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On note $f_n : x \mapsto e^x - nx$.

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée u_n dans l'intervalle $]-\infty, \ln(n)]$ et une unique solution notée v_n dans $[\ln(n), +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.
3. Démontrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 3$.
4. Soit $n \geq 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

ΥΥΥΥΥ