DS n° 1
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. a) Écrire le nombre $x = \dfrac{2^a \times 9^b}{8^c \times 6^d}$ sous la forme $2^n \times 3^m$ où a, b, c, d, n, m sont des entiers.

b) Simplifier au maximum l'expression $A(x) = \left(\dfrac{2x+7}{4x-2} - \dfrac{x+3}{2x-1}\right) \div \dfrac{x}{6x-3}$ en précisant pour quels réels x le calcul est valable.

c) À l'aide du triangle de Pascal, donner le développement de $(a-b)^4$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble E. On suppose que ces parties vérifient : $A \subset C,\ B \subset D,\ C \cap D = \varnothing,\ A \cup B = C \cup D$.

Prouver que $A = C$ et $B = D$. (on pourra s'aider d'un schéma, mais le raisonnement devra être entièrement rédigé)

3. On considère l'application suivante : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+3} \end{array}$.

a) f est-elle injective ?
b) Déterminer les antécédents de 0 et 2 par f s'ils existent. f est-elle surjective ?
c) Montrer que $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+3} \end{array}$ est une bijection et déterminer sa réciproque.

Exercice 2 (Les deux questions sont indépendantes)

1. a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n$.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n + 1$.

b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ S_n = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + (n-1)(n+1)$.

a) Écrire S_n à l'aide du symbole $\sum$.

b) Montrer, par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2,\ S_n = \dfrac{n(n-1)(2n+5)}{6}$.

c) En déduire la valeur de $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Calculer $U_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (i - j)$.

Exercice 3 (Les deux questions sont indépendantes)

1. Soit q un réel. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k q^k$.

a) Donner la valeur de $S_n(1)$ pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer, par récurrence, qu'on a l'égalité : $\forall n \geqslant 1,\ S_n(2) = 2 + (n-1)2^{n+1}$.

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} k \binom{k}{i} = 2 + (n-1)2^{n+1}$.

2. Calculer les sommes suivantes :

a) $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$; b) $T = \displaystyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant 2n} \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2n}{k} \binom{k}{j}$; c) $U = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

$\hookrightarrow$

Exercice 4 **Calcul des puissances d'une matrice**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0, v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$.

1. a) Calculer les coefficients de la matrice $(M - I)\times(M + 3I)$.

b) En déduire la relation $M^2 + 2M - 3I = 0$, puis que M est inversible et déterminer M^{-1}.

2. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = u_n M + v_n I$.

3. a) Déterminer la matrice A carrée d'ordre 2 telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $P\times Q$ et en déduire que P est inversible puis déterminer P^{-1}.

b) Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$.

c) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n : $A^n = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 - (-3)^{n+1} & 1 - (-3)^n \\ 3 + (-3)^{n+1} & 3 + (-3)^n \end{pmatrix}$.

e) Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.

5. Expliciter, pour tout entier naturel n, les neuf coefficients de la matrice M^n.

Exercice 5 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. a) En utilisant seulement la définition, dire si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I_2$.

En utilisant cette égalité, démontrer que M est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, exprimer M^{-1} en fonction seulement de a, b, c, d.

c) En appliquant le résultat du b) à la matrice A, retrouver le résultat du a).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. A est-elle inversible ? (on ne demande pas l'inverse).

3. a) Soit $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.

Montrer que : ${}^{t}T\times T = T\times{}^{t}T$ si, et seulement si, T est une matrice diagonale.

b) Montrer que le résultat est encore vrai pour une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 2$.

4. a) Rappeler la définition d'une matrice antisymétrique et montrer que la somme de deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.

b) Que peut-on dire du produit de deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c) Déterminer toutes les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$.