DS n° 2
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les deux questions sont indépendantes)

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système : $(S) \begin{cases} 5x - 10y - z - 7t = 7 \\ x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 4y - z - 3t = 3 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Écrire la matrice A associée à (S) . A est-elle inversible ?

2. En utilisant la méthode du pivot de Gauss et en discutant suivant la valeur du paramètre

$a \in \mathbb{R}$, résoudre le système : $(S') \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a+1)x + ay = 2a \\ ax + (a+1)y = 1 \end{cases}$

Exercice 2 (Les deux questions sont indépendantes)

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 2, 1)$, et l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - z = 0\}$.

a) Les familles (u_1, u_2) et (u_1, u_2, u_3) sont-elles libres ? Justifier.

b) Les vecteurs u_1, u_2 et u_3 appartiennent-ils à E ?

c) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une base et sa dimension.

d) Montrer que $E = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ puis déterminer $E \cap \text{Vect}\{u_3\}$.

e) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur x, y et z pour que $(x, y, z) \in \text{Vect}\{u_1, u_3\}$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (2, 1, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 2, 2, 0)$, $v_4 = (2, -1, 4, 7)$, $v_5 = (4, 4, 5, 5)$, $v_6 = (2, 2, 1, -5)$.

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.

a) Déterminer la dimension de E et montrer que (v_1, v_2, v_3) en est une base.

Quelles sont les coordonnées du vecteur v_6 dans cette base ?

b) Déterminer un vecteur v_7 tel que (v_1, v_2, v_3, v_7) soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice M_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et tous les autres coefficients sont égaux

à 1 : $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M^2 - M$.

b) Dédire de a) que M est inversible et donner son inverse.

c) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

d) On pose $D = P^{-1}MP$. Montrer que $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Montrer que, pour tout entier naturel k , on a $M^k = PD^kP^{-1}$.

f) Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer qu'il existe deux réels a_k et b_k (que l'on déterminera) tels que $M^k = a_k M + b_k I_3$.

2. Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$.

b) Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n .

c) À l'aide de la formule du binôme, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n \quad \text{où } c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

d) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$.

e) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k .

Exercice 4

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et on pose
 $(x, y, z) \longmapsto (-y - z, -x - z, x + y + 2z)$
 $u = (1, 1, -1), v = (-1, -1, 2)$ et $w = (2, -1, -1)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x, y, z)) = (x, y, z)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base puis sa dimension.
3. Montrer que (v, w) est aussi une base de E .
4. Montrer que (u) est une base de $\text{Ker}(f)$.
5. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$. f est-elle injective ?
6. Sans calculs supplémentaires, déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$. f est-elle surjective ?
7. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
8. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
9. On considère la matrice P dont les colonnes sont constituées des coordonnées de u, v et w dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Écrire P et justifier sans calculs que P est inversible, puis déterminer son inverse P^{-1} .

10. Déterminer $f(u), f(v)$ et $f(w)$, puis $f^2(u), f^2(v)$ et $f^2(w)$. Que peut-on en déduire pour f et f^2 où $f^2 = f \circ f$?

ΥΥΥΥΥ