L. Sup. B/L Le 20 décembre 2024

CONCOURS BLANC N° 1

Épreuve de mathématiques ; durée : 4 heures ; calculatrice interdite

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, 2y, -x+2y+z). \end{array}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et écrire sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base, puis montrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(1,1,1)\}$.

3. f est-il injectif ? surjectif ? Justifier.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

5. Calculer $(f \circ f)((x,y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Conclusion ? En déduire que si f était bijectif, on aurait $f = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 2

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -11 & -4 \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est $B = A - I_3$ où I_3 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. a) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f((x,y,z))$. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$ dont on donnera une base.

   b) Déterminer l'image de f et en donner une base.

   c) Calculer A^2 puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ où f^2 désigne $f \circ f$.

2. a) Vérifier que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Que peut-on en déduire pour f^3 ? A^3 ?

   b) En déduire que : $B^3 + 3B^2 + 3B + I_3 = 0$, que B est inversible et exprimer son inverse en fonction de B. Que peut-on dire de g ?

3. On pose $u_1 = (2,0,1)$; $u_2 = (-1,-1,2)$; $u_3 = (1,0,0)$.

   a) Montrer que $\mathcal{C}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Calculer $f(u_1), f(u_2)$ et $f(u_3)$, puis écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}'$.

   c) En déduire la matrice B' de g dans la base $\mathcal{C}'$.

   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ B'^n = \dfrac{(-1)^n}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2n & n^2-n \\ 0 & 2 & -2n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis expliquer comment on pourrait obtenir B^n (on ne demande pas de faire les calculs).

Exercice 3 *Étude des endomorphismes dont l'image est égale au noyau.*

I) Caractérisation

1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

   a) Montrer que n est un entier pair et déterminer le rang de f en fonction de n.

   b) Montrer que, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $(f \circ f)(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ f = 0$ et $2\,\mathrm{rg}(f) = n$.

   a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

   b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

3. Quelle propriété a-t-on démontrée avec les résultats du 1. et du 2. ?

↪

II) Représentation matricielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang p vérifiant $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

4. Donner la valeur de p en fonction de n et justifier que $p \geqslant 1$.

5. Soit $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

a) Justifier qu'il existe une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $(e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_p)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Posons, pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, $e_{p+i} = f(e_i)$; calculer $f(e_{p+i})$.

d) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{2p})$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 4

I) Résultats préliminaires

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Calculer les coefficients de la matrice $X^{\mathrm{t}}Y$.

2. a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; rappeler quelle relation doit lier les réels a, b, c, d pour que la matrice M ne soit pas inversible.

b) On suppose que M est <u>non nulle</u> et <u>non inversible</u>. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que : $M = X^{\mathrm{t}}Y$.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $PE_1 = X$ où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On admettra que, de même, si $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est non nulle, il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $QE_2 = Y$ où $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II) On considère une application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ non constante et telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \ \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

On cherche à établir l'équivalence : $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, $\varphi(M) \neq 0$.

1. a) Déterminer le réel $\varphi(I_2)$ en se souvenant que φ n'est pas une application constante.

b) Déterminer de même $\varphi(0)$ c-à-d l'image de la matrice nulle.

2. Établir que si M est inversible, alors $\varphi(M) \neq 0$.

3. Dans cette question on veut prouver la réciproque grâce à la contraposée c-à-d que si M n'est pas inversible, alors $\varphi(M) = 0$.

On fixe donc une matrice non inversible $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On peut alors avoir $M = 0$ ou $M = X^{\mathrm{t}}Y$ avec $(X, Y) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})^2$ non nuls (d'après **I)**).

a) Conclure si $M = 0$.

b) On suppose maintenant que $M = X^{\mathrm{t}}Y$ avec X et Y non nulles dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer N^2 et en déduire que $\varphi(N) = 0$.

c) D'après **I)**, on peut écrire $X = PE_1$ et $Y = QE_2$ avec P et Q inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que : $M = PN^{\mathrm{t}}Q$.

d) En déduire que $\varphi(M) = 0$.

4. Donner un exemple d'application φ vérifiant les hypothèses du **II)** en justifiant.

ϒϒϒϒϒ