DS n° 5
(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les trois questions sont indépendantes)

1. Soient $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + \dfrac{a}{2}$.

a) On suppose ici que $a = \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

b) On revient au cas général : $a \geqslant 0, a \neq 1$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n et de a.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Dans ce cas, quelle est sa limite ?

2. Calculer les limites suivantes : a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(2+\sin(x)\big)$.

3. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2+2}$; b) $|2x+1| \geqslant x-3$; c) $\tan(3x)+\tan(2x)=0$.

Exercice 2

On considère la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de h.
2. Montrer que : $\forall x \in \,]-1,1[,\ h(-x) = -h(x)$. Que peut-on en conclure ?
3. Étudier les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.
4. Vérifier que : $\forall x \in \mathcal{D}_h,\ \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2}{1-x} - 1$ et en déduire le sens de variation de la fonction $u : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ sur $\mathcal{D}_h$. En déduire enfin le tableau de variation complet de h sur $\mathcal{D}_h$.

On considère maintenant la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

5. Dresser le tableau de variation complet de g sur $\mathbb{R}$ (on rappelle la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$).
6. Déterminer la fonction composée $g \circ h$.
7. Justifier que la composée $h \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$, puis déterminer une expression simple de celle-ci. Que peut-on en conclure pour g et h ?

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n^2 + 3u_n - 1)$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+3x-1)$.

a) Dresser le tableau de variations de f en justifiant les résultats et en précisant les limites.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ et déterminer le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.

2. Quelles sont les limites réelles possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 \in \{1, -1, -2, -4\}$?
4. On suppose $u_0 > 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
5. On suppose $-1 < u_0 < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente, puis déterminer sa limite.
6. On suppose $-2 < u_0 < -1$. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite éventuelle.
7. On suppose $-4 < u_0 < -2$. Que peut-on dire de u_1 ? Conclure quant à la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite éventuelle.
8. On suppose $u_0 < -4$. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui converge vers une limite ℓ. On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la moyenne arithmétique des n premiers termes de (u_n), on pose donc : $v_n = \dfrac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

Partie A : On suppose de plus dans cette partie que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

1. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont majorées par ℓ.
   c) Que peut-on en déduire pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. a) Montrer que pour tout entier n non nul, $2v_{2n} \geqslant v_n + u_n$.
   b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Partie B : On revient au cas général dans cette partie : (u_n) n'est plus nécessairement croissante.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Rappeler pourquoi il existe $N \geqslant 1$ tel que : $\forall k \geqslant N,\ |u_k - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $n > N$, on a : $|v_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}|u_k-\ell| + \dfrac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k-\ell|$.
3. En déduire que : $\forall n > N,\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n}|u_k-\ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis qu'il existe $N' \geqslant 1$ tel que : $\forall n > N',\ |v_n-\ell| \leqslant \varepsilon$.
4. Que peut-on en déduire ?

Partie C : Un premier exemple.

On pose $u_0 \in [0;1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$.

1. a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in\,]0;1[$.
   b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ qu'on déterminera.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = 1 - u_n$ et $t_n = \dfrac{1}{w_n}$.
   a) Justifier que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = \dfrac{1}{1+u_n}$, puis justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(t_{n+1}-t_n) = \frac{1}{2}$.
   c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \frac{1}{2}$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nw_n = 2$.
   d) Déterminer alors un équivalent de w_n.
   e) On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(w_k)^2$. Exprimer w_k^2 à l'aide de u_k et u_{k+1}, puis montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie D : Un deuxième exemple.

On pose $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times \dfrac{1+2u_n}{1+3u_n}$.

1. a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ qu'on déterminera.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}$.
   a) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{1+2u_{n-1}}$.

      En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.

   c) Déterminer un équivalent de u_n.