CONCOURS BLANC N° 2

Épreuve de mathématiques ; durée : 4 heures

Exercice : (Les deux questions sont indépendantes)

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+e^x}{x+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et préciser les asymptotes horizontales ou verticales éventuelles de C_f.

c) i) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. On notera a le réel obtenu.

ii) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax)$. On notera b le réel obtenu.

iii) En déduire que C_f admet une asymptote oblique en $-\infty$.

2. Soient α et β deux réels. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers termes $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, et par les relations $x_{n+1} = \dfrac{y_n+\alpha}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n+\beta}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit ensuite pour tout entier n, $v_n = x_n - \dfrac{2\alpha+\beta}{3}$ et $w_n = y_n - \dfrac{\alpha+2\beta}{3}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n^2 + w_n^2 = \dfrac{v_0^2+w_0^2}{4^n}$.

c) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

d) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Problème 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1$ et $f(0) = -1$, ainsi que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

Partie I - Étude de f

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.

3. Déterminer les variations de f' et f, puis dresser le tableau de variation complet de f (avec les limites).

4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note $g : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction réciproque associée.

5. a) Dresser le tableau de variation complet de g (avec les limites).

b) Justifier que g est dérivable sur $J \setminus \{-1\}$.

c) Montrer que g est aussi dérivable en -1, en étudiant un taux d'accroissement. On précisera $g'(-1)$.

Partie II - Étude d'une suite implicite

6. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.

7. Exprimer x_k à l'aide de g puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite.

8. Donner la valeur de x_0 et justifier que $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$. On pourra utiliser : $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > \dfrac{1}{4}$.

Partie III - Étude d'une suite récurrente

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

9. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

10. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

11. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.

12. Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$, d'inconnue $x > 0$, sont équivalentes. En déduire les solutions de l'équation $x = \varphi(x)$.

13. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$.

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

15. On cherche une valeur approchée à 10^{-3} près de x_1. Déterminer une valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de x_1 à 10^{-3} près (on ne demande pas une valeur numérique).

Problème 2 :

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, -2)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice S' de s dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Calculer $(S')^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer les calculs).

2. a) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de I_3 et S. En déduire que s est bijectif et déterminer S^{-1}.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$.

d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

e) Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

f) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $B = S - 2I_3$.

a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Comparer avec le résultat de la question 2.

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On pose $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

1. Calculer U et vérifier que $u \circ s = s \circ u = f$.

2. Soit $\mathcal{B}'' = (e''_1, e''_2, e''_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que $e''_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, e'_1$, $e''_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e'_2$ et $e''_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\, e'_3$.

a) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et vérifier que sa transposée est son inverse.

b) Écrire la matrice U' de u dans la base $\mathcal{B}''$.

3. a) Exprimer la matrice de s dans la base $\mathcal{B}''$ en fonction de S'.

b) En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$.

4. a) Quel est l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x) = x$?

b) Soit $P = \mathrm{Vect}\{e''_2, e''_3\}$, montrer que $f(P) = P$.

$\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$