CONCOURS BLANC N° 2

Épreuve de mathématiques ; durée : 4 heures

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x + \sin^2(x).$$

1. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \leqslant f(x) \leqslant 1 + x$.

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x) + \pi$.

b) Établir le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

c) Expliquer comment on peut obtenir la courbe représentative C_f de f sur $\mathbb{R}$ à partir de la portion de la courbe obtenue sur $[0, \pi]$?

3. En quels points C_f possède-t-elle des tangentes horizontales ? (on déterminera les coordonnées de ces points)

4. Tracer l'allure de la courbe C_f. La fonction f est-elle impaire ?

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$ que l'on prolonge à l'intervalle fermé $[0;1]$ en posant $f(0) = f(1) = 0$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I

1. Soit g la fonction définie sur $]0;1[$ par $g(x) = \ln(1-x) - \ln(x)$.

a) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

b) Étudier le signe de $g(x)$ en fonction de x.

2. Montrer que, pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $f\left(\dfrac{1}{2} + x\right) = f\left(\dfrac{1}{2} - x\right)$. Comment interpréter ce résultat graphiquement ?

3. a) Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $f'(x)$.

b) Étudier la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu. En déduire l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(1,0)$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. a) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a + b = 1$.

En utilisant la question 3., montrer que : $a\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + b\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) \leqslant \ln(2)$.

b) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité dans l'inégalité précédente ?

Partie II

On généralise l'inégalité précédente. Soient p un entier naturel tel que $p \geqslant 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i = 1$. On pose $H_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \ln\left(\frac{1}{a_i}\right)$.

1. a) Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(t) \leqslant t - 1$. Pour quelles valeurs de t cette inégalité est-elle stricte ?

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $a_i \ln\left(\dfrac{1}{pa_i}\right) \leqslant \dfrac{1}{p} - a_i$ avec égalité si, et seulement si, $a_i = \dfrac{1}{p}$.

2. a) Montrer que : $H_p - \ln(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \ln\left(\frac{1}{pa_i}\right)$.

b) En déduire que : $H_p \leqslant \ln(p)$.

c) Déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_p$ pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

↪

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
   On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.
2. Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$ et justifier que $\alpha \neq 0$.
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = \alpha$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.
4. a) Montrer que, pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x) - x \geqslant 0$. Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.
5. On cherche à préciser ce résultat en déterminant un équivalent de u_n. On pose alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.
   b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et en déduire que la suite (S_n) est majorée puis qu'elle converge.
   On note L sa limite. Montrer que $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.
   d) Montrer finalement que $u_n \sim \dfrac{e^{-L}}{2^n}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. Pour quelle(s) valeurs(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle non-inversible ?
2. Calculer A^2 et A^3.
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   a) Soit $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = AM - MA$
   Justifier que φ est linéaire, et en déduire que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Soient α, β et γ trois réels et $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in S$.
   c) Réciproquement, on suppose que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}$. Déterminer, en fonction des coefficients de M, trois réels α, β et γ tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.
   d) Déduire des questions précédentes une base de $\mathcal{S}$.
4. On considère $\mathcal{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$.
   a) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
   b) Dans cette question, on pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, et l'on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
      i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.
      ii. Trouver un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
      iii. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \big(u, f(u), f^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iv. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   c) On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela, on considère une matrice M quelconque de $\mathcal{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.
      i. Prouver qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.
      ii. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \big(u, f(u), f^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iii. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{S}'$ sont semblables. Que vaut leur trace ?

ϒϒϒϒϒ