Exercices supplémentaires : suites réelles

Exercice 1
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 15 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.

1/ Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

2/ Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

3/ Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

1/ Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

2/ Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$.
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3u_n + 4v_n$.

1/ Démontrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

2/ Déterminer l'expression de u_n et v_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = nu_n - 1$.

1/ Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

2/ Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n^2$.

1/ Démontrer que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défini.

2/ Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

3/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6
On définit la suite u par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$.

1/ Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

2/ La suite u est-elle convergente ?

Exercice 7
Dans chacun des cas suivants, donner l'expression du terme général u_n en fonction de n :

1/ $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n + 1$.

2/ $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. (suite de Fibonacci)

3/ $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \dfrac{2}{3}u_{n+1} + \dfrac{1}{9}u_n = 0$.

4/ $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\sqrt{2}u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 8
On définit les suites u et v par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

1/ Démontrer que u et v sont adjacentes.

2/ Démontrer par l'absurde que leur limite commune est irrationnelle.

Exercice 9
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$.

1/ Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2/ ***a)*** Si $u_0 \in [-1, 0]$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-1, 0]$. En déduire la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Si $u_0 \notin [-1, 0]$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10
Déterminer un équivalent simple de :

1/$u_n = 3 - 2n - n^3 + 14n^2$. **2**/$v_n = 100\ln(n) - \dfrac{n}{100}$. **3**/$y_n = \dfrac{\tan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{\cos\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) - 1}$.

Exercice 11
1/ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n - (\ln(n))^2$. Déterminer un équivalent de u_n.

2/ On suppose qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leqslant u_n \leqslant 2n$. Déterminer un équivalent de $\ln(u_n)$.

3/ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 12
n^n et $n!$ sont-ils équivalents ?

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

1/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

2/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right]$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]$.

3/ Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Qu'en déduit-on ? Répondre à la question de l'exercice.

Exercice 13
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n^2}{n^3 + k^2}\right)$.

1/ Calculer S_1 et S_2.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Démontrer que $n^3 + 1 \leqslant n^3 + k^2 \leqslant n^3 + n^2$.

3/ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!], \dfrac{n}{n+1} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$.

4/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.