

Exercices supplémentaires : fonctions usuelles

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1/ $9e^{2x} - 6e^x + 1 = 0$.

2/ $5e^{-2x^2} - 1 \leq 0$.

3/ $\ln|x| + \ln|3-x| = 0$ (étudier tous les cas).

4/ $(x^3)^x = x^{(x^3)}$.

5/ $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$.

6/ $\sin(x) = \cos(2x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

7/ $\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ sur \mathbb{R} .

Exercice 2

1/ Étudier sur \mathbb{R} les fonctions $f : x \mapsto \sin(x) - x$ et $g : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

2/ En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 3

1/ Étudier les fonctions $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $g : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$.

2/ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}}\right)$. 2/ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x}\right)$. 3/ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{x^3}\right)$. 4/ $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (x \tan(x))$.

Exercice 5

1/ Démontrer que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2/ Démontrer que $\forall a \in \mathcal{D}_{\tan}, \forall b \in \mathcal{D}_{\tan}$, avec $a + b \in \mathcal{D}_{\tan}$, $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

3/ En déduire que $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 1$, puis la valeur exacte de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.