Exercices supplémentaires : séries numériques

Exercice 1
Déterminer la nature (convergence, divergence) des séries :

1/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{a+1}{a}\right)^n$, $a\in\mathbb{R}^*$ 2/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\ln(n^2+1)}$ 3/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n^2+1)\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}$

4/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a\in\mathbb{R}$ 5/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 6/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ 7/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{-\sqrt{n}}$

8/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{2^n+n}$ 9/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ 10/ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

Exercice 2
Existence et calcul des sommes suivantes : 1/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$ 2/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!2^n}$.

Exercice 3
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$.
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent. Démontrer que $\sum v_n$ converge.

Exercice 4
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs et soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

1/ Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

2/ Montrer que si $\sum u_n$ diverge et si $(u_n)_n$ est majorée, alors $\sum v_n$ diverge.

3/ Donner un exemple où $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

Exercice 5
Posons, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

1/ Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et conclure quant à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$.

2/ ***a)*** Justifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2p+1}$, mais aussi que $S_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2p+1}$.

b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n}=-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

c) A l'aide d'un changement d'indice puis d'une somme de Riemann, en déduire la limite de S_{2n} puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 6
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs et soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

1/ On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Démontrer que la série $\sum\dfrac{u_n}{S_n}$ converge.

2/ On suppose que la série $\sum u_n$ diverge.

a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{S_n^2}\leqslant\dfrac{1}{S_{n-1}}-\dfrac{1}{S_n}$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$.

Exercice 7

Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

1/ Le but est de calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$:

a) Déterminer, pour $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction dérivée de $f : x \longmapsto x^k$ puis de $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ sur $[0,1[$.

b) Rappeler l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ et déduire de la question $a)$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, pour $x \in [0,1[$.

2/ Le but est de calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$:

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^x t^k \mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t$.

c) $\forall t \in [0,x]$, encadrer t^{n+1} puis l'intégrale de la question précédente. En déduire que cette intégrale tend vers 0 si n tend vers $+\infty$, pour $x \in [0,1[$.

d) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, pour $x \in [0,1[$.