Exercices supplémentaires : espaces probabilisés

Exercice 1
On lance un dé non truqué à 6 faces 5 fois.
Quelle est la probabilité :

1/ d'obtenir 5 numéros différents ?

2/ d'avoir au moins deux faces identiques ?

3/ d'avoir au moins un multiple de 3 ?

4/ que le produit des numéros obtenus soit pair ?

5/ d'avoir au moins un multiple de 3 et au moins un nombre pair ?

Exercice 2
Soit $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, avec $\Omega = [\![1, n]\!]$.
On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \lambda k$.
Déterminer ce coefficient de proportionnalité.

Exercice 3
On constitue une file d'attente de n personnes en leur attribuant un numéro de passage à chacun.

1/ Quelle est la probabilité que deux amis soient distants de r places, $1 \leqslant r \leqslant n-1$?

2/ Quelle est le cas le plus probable ?

Exercice 4
The Monty Hall problem :
Monty Hall, présentateur américain de jeux télévisés des années 60, proposait au candidat, lors de l'ultime épreuve d'un jeu, de choisir entre 3 portes. Derrière l'une d'entre elles se trouvait une voiture, et une chèvre derrière chacune des deux autres. Le candidat remportait le lot caché derrière la porte choisie.
Le candidat choisissait une porte, puis Monty Hall, qui sait ce qui se cache derrière chaque porte, ouvrait une des 2 portes restantes et découvrait une chèvre. Il proposait au candidat de conserver la porte choisie au départ ou de choisir la dernière porte.
Qu'auriez-vous fait à la place du candidat ?

Exercice 5
Une urne contient a boules blanches et b boules rouges et contient au total $a + b = N$ boules, avec a, b et N entiers naturels non nuls.
On tire successivement n boules ($n \in \mathbb{N}^*$), en remettant à chaque tirage la boule si elle est rouge, mais pas si elle est blanche.

1/ Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?

2/ La deuxième boule est rouge. Quelle est la probabilité que la première était blanche ?

Exercice 6
Soit n un entier naturel non nul. On dispose de N urnes, numérotées $U_1, ..., U_N$, contenant chacune N boules. Chaque urne U_k possède k boules blanches et $N - k$ boules noires, $1 \leqslant k \leqslant N$.
On choisit une urne au hasard, puis on effectue des tirages successifs d'une boule avec remise.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au $(n+1)-$ième tirage, sachant que l'on a obtenu que des boules blanches pour les n premiers tirages ?

2/ Déterminer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?

Exercice 7

Un promeneur capricieux se promène entre deux maisons, notées A et B.
A l'instant 0, il est en A. A chaque instant, il lance un dé non truqué et décide de changer de maison uniquement s'il obtient un 6.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit les événements A_n : "le promeneur est en A à l'instant n" et B_n : "le promeneur est en B à l'instant n".
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1/ Exprimer a_{n+1} puis b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

2/ En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction de n puis leurs limites. Ce résultat dépend-il du choix effectué par le promeneur suivant le résultat du dé ?

Exercice 8

Un gardien de phare a 10 clés, dont une seule ouvre la porte du phare.
Pour ouvrir la porte, deux cas se présentent :

- S'il est ivre, chaque clé peut être essayée plusieurs fois.
- S'il est sobre, une clé ne sera essayée qu'une seule fois.

1/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité i_k (respectivement s_k) qu'il ouvre la porte au $k-$ième essai lorsqu'il est ivre (respectivement lorsqu'il est sobre).

2/ On sait que le gardien est ivre un jour sur 3. Un jour, après huit essais, il n'est toujours pas parvenu à ouvrir la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?