Exercices supplémentaires : éléments de logique

Exercice 1
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis énoncer leur négation :

1/ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 3$.

2/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 3$.

3/ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p > n^2$.

4/ $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, p > n^2$.

5/ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x \leqslant z < y$.

Exercice 2
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs universel et existentiel les assertions suivantes, puis leur négation :

1/ f est la fonction nulle.

2/ f s'annule sur $\mathbb{R}$.

3/ f est constante.

4/ f est bornée.

5/ f est croissante.

6/ f admet un minimum et il est atteint en un unique réel.

Exercice 3
Compléter les énoncés suivants avec "il faut", il"suffit" ou "il faut et il suffit"en adoptant la formulation la plus riche :

1/ Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il .... que ses diagonales se coupent en leur milieu.

2/ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = p^2$, il .... que n soit positif.

3/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = y^2$, il .... que x soit positif.

4/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour que f soit strictement croissante, il .... que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.

5/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour que f soit croissante, il .... que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geqslant 0$.

Exercice 4
Rappels :
- On dit qu'un entier relatif n est pair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
- On dit qu'un entier relatif n est impair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.
- un nombre réel est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme irréductible $\dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer les assertions suivantes :

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$. n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair.

2/ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annule jamais et telle que $f(0) = 1$.
Démontrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.