Exercices supplémentaires : ensembles et applications

Exercice 1
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1/ Montrer que $A \subset B \iff A = A \cap B$.

2/ Montrer que $A \subset B \iff B = A \cup B$.

3/ Montrer que $A = B \iff A \cap B = A \cup B$.

Exercice 2
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1/ Montrer que $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

2/ Montrer de deux façons différentes que $A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}$.

Exercice 3
Soient n un entier naturel avec $n \geqslant 2$ et $A, A_1, A_2, ..., A_n$ des parties d'un ensemble E.

1/ Démontrer que $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$ et que $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup A_i)$.

2/ Démontrer que $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et que $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Exercice 4
Soient E et F deux ensembles.

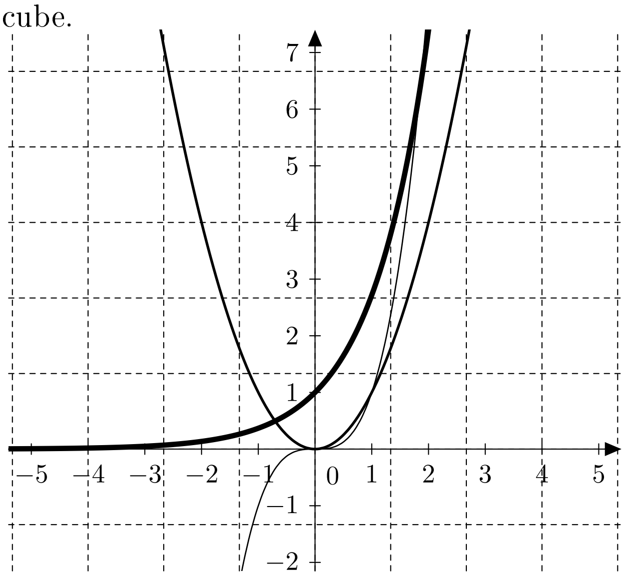
1/ Montrer que $E \subset F \iff \mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$.

2/ Comparer $\mathscr{P}(E \cap F)$ et $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.

3/ Que penser de $\mathscr{P}(E \times F)$ et $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$?

Exercice 5
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
On peut le voir comme un "ou" exclusif, contrairement à l'union qui correspond à un "ou" inclusif.
Démontrer que $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Exercice 6
On a tracé sur un même graphique ci-dessous les représentations graphiques des fonctions exp, carré et cube.



1/ Ces fonctions sont-elles des injections, surjections ou bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

2/ Dans le cas contraire, sur quels intervalles de départ et d'arrivée sont-elles des bijections ?

Exercice 7
Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n + 1$. f est-elle une injection, surjection ou bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

Exercice 8
Soit l'application $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) \longrightarrow \dfrac{p}{q} \end{array} \right.$.
f est-elle une injection, surjection ou bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 9
Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
Démontrer que si f est injective, $\forall A \in \mathscr{P}(E), \forall B \in \mathscr{P}(F), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 10
Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}^2$ définies par $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -y\}$.

1/ Montrer que $F \subset E$. Y a t-il égalité ?

2/ Interpréter géométriquement ces deux ensembles et retrouver le résultat de la question précédente (indication : factoriser le premier membre de l'équation vérifiée par les éléments de E) .

Exercice 11
$\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

1/ Montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ et que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

2/ Définir l'application $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ et en déduire $\mathbb{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

3/ Exprimer l'application $\mathbb{1}_{A \setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

4/ Exprimer l'application $\mathbb{1}_{A \Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$, où $A \Delta B$ est la différence symétrique de A et B.

Exercice 12
Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Démontrer que :

1/ $\forall A \in \mathscr{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.

2/ si f est injective, $\forall A \in \mathscr{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.

3/ $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.

4/ si f est surjective, $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.