# Exercices supplémentaires : l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

**Exercice 1**
Soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.
Démontrer que $E$ et $F$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2**
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 4x - 2y - z = 0\}$.
Démontrer que $E$ et $F$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 3**
Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ et $G = \{(2x - 3y, x, -x + 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
$F$ et $G$ sont-ils des sev de $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 4**
Soient $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2z\}$, $B = \{(x, x - y, y, x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$,
$C = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 1\}$ et $D = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = c\}$.

**1**/ $A, B, C$ et $D$ sont-ils des sev de $\mathbb{R}^4$ ?

**2**/ Déterminer $B \cap D$.

**Exercice 5**
Soit $F =$Vect$((1, -3))$ un sev de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer la ou les équations cartésiennes de $F$.

**Exercice 6**
Soit $F =$Vect$((3, 2, 1), (-1, -2, -3)$ un sev de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la ou les équations cartésiennes de $F$.

**Exercice 7**
Soit $F =$Vect$((0, 1, 2))$ un sev de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la ou les équations cartésiennes de $F$.

**Exercice 8**
Soient $F$ et $G$ deux sev de $\mathbb{R}^n$ avec $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
Démontrer que $F \cup G$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 9**
Soient $x_1 = (1, 0), x_2 = (-1, 3)$ et $x_3 = (-5, -4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

**1**/ La famille $(x_1)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$ ?

**2**/ La famille $(x_1, x_2)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$ ?

**3**/ La famille $(x_1, x_2, x_3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 10**
Soient $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que la famille $(u_1, u_2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 11**
Soient $u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1)$ et $u_3 = (1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Démontrer que la famille $(u_1, u_2, u_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ et en extraire une base de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 12**
Soient $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (0, 2, 0), u_3 = (0, 0, 2)$ et $u_4 = (1, 1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

**1**/ La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ? Est-elle une base de $\mathbb{R}^3$ ?

**2**/ La famille $(u_1, u_2, u_3)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ? Est-elle une base de $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 13**
Soient $u_1 = (1,1,0,1), u_2 = (0,1,1,0), u_3 = (0,0,3,-1)$ et $u_4 = (1,0,2,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est-elle une famille géněratrice de $\mathbb{R}^4$ ? Est-elle une base de $\mathbb{R}^4$ ?

**Exercice 14**
Soient $x_1 = (1,1,0), x_2 = (1,0,0), x_3 = (0,1,0), x_4 = (3,2,1)$ et $x_5 = (-9,-4,-5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Les familles $(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_4)$ et $(x_1, x_4, x_5)$ sont-elles libres ?

**Exercice 15**
Soient $m \in \mathbb{R}$ et $u = (1, m, 2), v = (-1, 8, m)$ et $w = (1, 2, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les valeurs du réels $m$, s'il en existe, pour lesquelles la famille $(u, v, w)$ est liée.

**Exercice 16**
Soient $u_1 = (1,0,0), u_2 = (2,5,1), u_3 = (1,1,1)$ et $u_4 = (1,-1,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 17**
Soient $u_1 = (1,0,1,0)$ et $u_2 = (0,1,0,0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Démontrer que la famille $(u_1, u_2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 18**
Soient $u = (2,1,0), v = (1;2;4)$ et $w = (-3,-2,-1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

**1/** Démontrer que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**2/** Soit $t = (4,5,6)$. Déterminer les coordonnées de $t$ dans la base $\mathscr{B}$.

**Exercice 19**
Soit $F =$Vect$(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (2,3,-1), u_2 = (0,5,3)$ et $u_3 = (-4,9,11)$.
Déterminer le rang de la famille $(u_1, u_2, u_3)$, puis une base de $F$ et sa dimension.

**Exercice 20**
Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0 \text{ et } y - 3z = 0\}$.
Démontrer que $F$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base et sa dimension.

**Exercice 21**
Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ des solutions du système :

**1/** $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y - z & = & 0 \\ 2x - 5y + 2z & = & 0 \\ 3x - 7y + 5z & = & 0 \end{array} \right.$

**2/** $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right.$

**3/** $(S) : \ x + 2y \ = \ 0$

**Exercice 22**
Soient $u = (1,2,3), v = (3,2,1), w = (1,4,7)$ et $t = (-1,6,9)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

**1/** Montrer que $(u, v)$ est une base de Vect$(u, v)$.

**2/** $w$ et $t$ appartiennent-ils à Vect$(u, v)$ ? Si oui, donner leurs coordonnées dans la base $(u, v)$.

**3/** Démontrer que $(u, v, t)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les coordonnées de $e = (1,0,0)$ dans cette base ?

**Exercice 23**
Soit $F$ l'ensemble des quadruplets de $\mathbb{R}^4$ dont la somme des deux premiers coefficients est égale à la somme des deux derniers.

**1**/ Démontrer que $F$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.

**2**/ Déterminer une base de $F$.

**Exercice 24**
Soient $u = (1, 2, -1), v = (3, -1, 2), w = (1, 3, -1)$ et $t = (2, -2, 3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $\mathrm{Vect}(u, v) \cap \mathrm{Vect}(w, t)$.

**Exercice 25**
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = by + cz\}$.

**1**/ Montrer que $E$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ et donner sa dimension.

**2**/ On note $F$ et $G$ les sev de $\mathbb{R}^3$ définis par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = ax + cz\}$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\}$.
Démontrer que si $2abc + ab + bc + ca \neq 1$, alors $E \cap F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

**3**/ On cherche à quelles conditions on peut avoir $E \subset F \cap G$ :

***a)*** Démontrer que $E \subset F \cap G \iff E = F = G$.

***b)*** Démontrer que $E \subset F \cap G \iff a = b = c = -1$.