Exercices supplémentaires : applications linéaires

Exercice 1
Parmi ces applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont linéaires ?

1/ $f_1 : (x,y,z) \longmapsto (x-y+z, -7z)$.

2/ $f_2 : (x,y,z) \longmapsto (x-z, y+1)$.

3/ $f_3 : (x,y,z) \longmapsto (0, 2x-z)$.

4/ $f_4 : (x,y,z) \longmapsto (z, xy)$.

5/ $f_5 : (x,y,z) \longmapsto (y-x, z^2)$.

Exercice 2
Soit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x+3y) \end{array} \right.$.

1/ Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2/ Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3/ f est-elle surjective ? Injective ? Que peut-on en conclure pour f ?

Exercice 3
Soit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y, 2y-x) \end{array} \right.$.

1/ Démontrer que f est linéaire.

2/ f est-elle surjective ?

3/ Déterminer $\ker(f)$. f est-elle injective ?.

Exercice 4
Soit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-z, y+2z) \end{array} \right.$.

1/ Démontrer que f est linéaire.

2/ f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 5
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_1) = (1,-1,2)$, $f(e_2) = (-3,2,-1)$ et $f(e_3) = (-7,4,1)$.

1/ Déterminer le ou les antécédents (s'il en existe) de $u = (-1,-1,8)$ et $v = (-2,1,3)$ par f.

2/ f est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 6
Soit l'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) \end{array} \right.$.

1/ Démontrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2/ Déterminer une base de $\ker(p)$. p est-elle injective ?

3/ Déterminer une base de $\mathrm{Im}(p)$. p est-elle surjective ?

4/ Démontrer que $p \circ p = p$.

Exercice 7
On considère l'application f définie par :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = x - 2y + 3z$.

1/ Démontrer que f est une forme linéaire.

2/ f est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 8
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = f \circ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 = f \circ f \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

1/ Démontrer que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2/ Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(u, f(u), f^2(u))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Démontrer que :

1/ $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.

2/ $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.

3/ $\ker(u) = \ker(u^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

Exercice 10
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

1/ Démontrer que $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(g \circ f))$.

2/ Démontrer que si $f \circ g = g \circ g$ (f et g commutent), alors $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.