Exercices supplémentaires : espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1
On donne quatre matrices de $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
La famille (A, B, C, D) est-elle libre ?

Exercice 2
On donne quatre matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1/ Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2/ Déterminer les coordonnées de la matrice $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3
Soit l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donner une base de E et déterminer $\dim(E)$.

Exercice 4
On considère trois matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 vérifiant $AM = MB$.
Démontrer que E est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (A, C) est une base de E.

Exercice 5

1/ Démontrer que l'ensemble $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

2/ Même question pour l'ensemble $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3/ Conjecturer plus généralement les dimensions de l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et de l'ensemble $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6
Soient A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$.
Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application f qui à toute matrice matrice carrée M d'ordre 2 associe la matrice $AM - MA$.

1/ Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2/ Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3/ Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

4/ Démontrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8
Soit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[x] \quad | \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^4 + (a - b)x^3 + bx + 3a - b\}$.
Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$, donner une base de E et déterminer $\dim(E)$.

Exercice 9
Soit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \quad | \quad \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+1)P'(x)\}$.
Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$, donner une base de E et déterminer $\dim(E)$.

Exercice 10
Posons, pour tout réel x, $P_1(x) = (x-1)^2, P_2(x) = x^2$ et $P_3(x) = (x+1)^2$.

1/ Démontrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

2/ Déterminer les coordonnées de $Q : x \longmapsto x^2 + x + 1$ dans cette base.

Exercice 11
On pose $E = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(0) = P'(0) = 0\}$.

1/ Démontrer que E et F sont des sev de $\mathbb{R}_3[x]$. Déterminer une base de E et une base de F.

2/ Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$. Que représente E pour f ? En déduire $\mathrm{Im}(f)$.
Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques des deux ensembles.

3/ Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$. Démontrer que g est un isomorphisme.

Exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & f(P) : x \longmapsto xP'(x) - P(x) \end{array} \right.$.

1/ Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

2/ En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$, puis une base de $\ker(f)$.

Exercice 13
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_1[x])$ l'application qui à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_2[x]$, associe $f(P) : x \longmapsto 2P(x) + (1-x)P'(x)$.

1/ Justifier que pour toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_2[x]$, $f(P) \in \mathbb{R}_1[x]$.

2/ Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}_1[x]$ et en déduire $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 14
Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ $n+1$ réels distincts.
On pose $\forall i \in [\![0, n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$.

1/ Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

a) Vérifier le degré de la fonction polynôme L_i.

b) Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_k)$.

2/ Montrer que la famille $\mathscr{B} = (L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

3/ *a)* Soit P une fonction polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = x$.