

**Soutien n° 2 : Matrices et Systèmes linéaires (1)****Exercice 1**

Calculer tous les produits possibles à l'aide des matrices suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Écrire  ${}^tA$  et  ${}^tB$ , puis calculer  $A \cdot {}^tB$ ,  $B \cdot {}^tA$ ,  $A \cdot {}^tA$ ,  $B \cdot {}^tB$ ,  ${}^tA \cdot B$ ,  ${}^tB \cdot A$ ,  ${}^tA \cdot A$  et  ${}^tB \cdot B$ .

**Exercice 3**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Déterminer la forme générale des matrices  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ .

**Exercice 4**

Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et  $b \times c \neq 0$ .

- Calculer  $M^2$ . À quelle(s) condition(s) sur  $a, b, c, d$  peut-on trouver un réel  $\lambda$  tel que :  $M^2 = \lambda M$  ?
- Donner un exemple de matrice  $M$  vérifiant cette condition.
- Sous les conditions du a), calculer  $M^3$  et  $M^4$  en fonction de  $M$  et  $\lambda$  et en déduire l'expression de  $M^n$  en fonction de  $M, \lambda, n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

**Exercice 5**

Soit  $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  ${}^tS$  et comparer à  $S$ .
- Soit  $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $u \cdot S$  et  $S \cdot {}^tu$ . Que remarque-t-on ? À quoi est-ce dû ?
- Calculer  $S^2$  et  $S^3$ . Ces matrices sont-elles symétriques ? Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n$  est symétrique.
- Le produit de deux matrices symétriques de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est-il une matrice symétrique ?

**Exercice 6**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $AB$ .  $A$  est-elle inversible ? Déterminer  $M = BA$  puis  $M^2$ .

**Exercice 7**

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , on pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$  et  $I = I_3$ .

- Calculer  $(A + I)(2I - A)$ . En déduire que  $A$  est inversible.
- On pose  $B = \frac{1}{3}(A + I)$ ,  $C = \frac{1}{3}(2I - A)$ .

Calculer  $B + C$  et  $2B - C$ , puis montrer que :  $B^2 = B$  et  $C^2 = C$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :  $A^n = 2^n B + (-1)^n C$  et expliciter  $A^n$ .

**Exercice 8**

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $A^k = 0$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $I_n - A$  est inversible et que  $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible et déterminer sa matrice inverse.

**Exercice 9**

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que :  $A^3 + 2A^2 + A + \alpha I_n = 0$  et  $A^2 + 2A + I_n \neq 0$ . Montrer que  $A$  est inversible si et seulement si  $\alpha \neq 0$ .