

Soutien n° 3 : Matrices et Systèmes linéaires (2)**Exercice 1**

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \quad (S') \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ -3x + 6y - 3t = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Montrer qu'il existe un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}, \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Exercice 3

Résoudre et discuter les systèmes d'équations linéaires suivant les valeurs du paramètre réel a :

$$(S) \begin{cases} ax + 3y = 1 \\ x + (a-2)y = -1 \end{cases} \quad (S') \begin{cases} (1+a^2)x - 3y = 5 \\ 4y + 3z = 8 \\ az = 4 \end{cases} \quad (S'') \begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - ay - az = a \\ x - y - az = 1 \end{cases}$$

Exercice 4

a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer l'inverse.

b) Même question avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Même question avec $C = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Déterminer l'inverse de la matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Exercice 6

1. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

2. Résoudre, en fonction des valeurs de m , le système $(S) \begin{cases} mx + y = m + 4 \\ 2x + (m+1)y = -2m - 6 \end{cases}$.