TD n° 12 : Fonctions usuelles

Exercice 1

a) Montrer que, pour tout x réel, $e^x \geqslant 1+x$.

b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

c) En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Exercice 2

Résoudre les équations, inéquations ou systèmes d'équations suivants :

a) $\ln|x|+\ln|x+1| = 0$; b) $\ln(x)-2+\dfrac{1}{\ln(x)} > 0$; c) $9^x+3^x-12=0$; d) $\begin{cases} x^2-y^2 &= 12 \\ \ln(x)-\ln(y) &= \ln(2) \end{cases}$

Exercice 3

On considère les applications $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}$.

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 4

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to1} \big(\ln(x)\big)^{x-1}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $(a,b\in\mathbb{R}, a\neq b)$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ les équations suivantes : a) $\sqrt{x}^{\,x} = x^{\sqrt{x}}$ b) $(x^2)^x = x^{x^2}$
2. Pour quels réels a et b a-t-on l'égalité : $a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}$?
3. Simplifier l'expression $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$ en précisant le domaine de définition.

Exercice 6

Comparer, au voisinage de $+\infty$, pour $1<a<b$: $f(x) = a^{(b^x)}$ et $g(x) = b^{(a^x)}$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x)+\cos(3x)=0$ b) $\sin(2x) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ c) $\tan(x)\cdot\tan(4x) = -1$

Exercice 8

À l'aide des limites remarquables, calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-e^{-x}}{\tan(2x)}$.

Exercice 9

Démontrer les égalités suivantes :

a) $\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(\operatorname{Arc}\tan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(\operatorname{Arc}\tan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $\forall x\in[0,\pi[,\ \operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right) = \dfrac{x}{2}$.

Exercice 10

Montrer que : $\forall x>0,\quad \operatorname{Arc}\tan(x)+\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$\forall x<0,\quad \operatorname{Arc}\tan(x)+\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 11

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) - 2\operatorname{Arc}\tan(x)$.

Indications pour les exercices du TD n° 12

Ex. 1 : a) étudier $f(x) = e^x - 1 - x$; b) étudier $g(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$; c) minorer $\dfrac{e^x}{x}$ grâce à b) puis faire le changement de variable $y = \ln(x)$ pour calculer la 2 ème limite.
Ex. 2 : a) utiliser les propriétés du logarithme pour se ramener à 2 équations du second degré ; b) réduire au même dénominateur ; c) faire le changement d'inconnue $y = 3^x$; d) se débarrasser des logarithmes et substituer dans la 1 ère équation.
Ex. 3 : 1. remarquer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ et $f(x) > 0$; 2. résoudre $g(x) = y$ pour $y \in \mathbb{R}$.
Ex. 4 : a) poser $y = 1/x$; b) se ramener à la limite du cours avec $\sqrt{x} = x/\sqrt{x}$; c) "passer" à l'exponentielle et faire le changement $y = \ln(x)$; d) mettre e^{bx} en facteur et se ramener à une limite connue.
Ex. 5 : 1. a) b) prendre le logarithme de chaque membre puis factoriser ; 2. et 3. : utiliser l'exponentielle pour transformer les expressions.
Ex. 6 : faire le quotient et "passer" à l'exponentielle puis utiliser les limites de référence.
Ex. 7 : a) se ramener à $\cos(a) = \cos(b)$; b) se ramener à $\sin(a) = \sin(b)$; c) se ramener à $\tan(a) = \tan(b)$ avec $x \longrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ dans $\tan(x)$.
Ex. 8 : a) faire apparaître $\dfrac{\sin(x)}{x}$; b) $\sin(2x) = ...$; c) mettre e^{-x} en facteur au numérateur
Ex. 9 : a) utiliser $\cos^2 a = \dfrac{1}{1+\tan^2(a)}$; b) utiliser a) et $\cos^2 + \sin^2 = 1$; c) exprimer $\cos(x)$ à l'aide de $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
Ex. 10 : étudier la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arc}\tan(x) + \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
Ex. 11 : déterminer $D_f,\ D_{f'}$ puis calculer $f'(x)$ en simplifiant au maximum et conclure.

Indications pour les exercices du TD n° 12

Ex. 1 : a) étudier $f(x) = e^x - 1 - x$; b) étudier $g(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$; c) minorer $\dfrac{e^x}{x}$ grâce à b) puis faire le changement de variable $y = \ln(x)$ pour calculer la 2 ème limite.
Ex. 2 : a) utiliser les propriétés du logarithme pour se ramener à 2 équations du second degré ; b) réduire au même dénominateur ; c) faire le changement d'inconnue $y = 3^x$; d) se débarrasser des logarithmes et substituer dans la 1 ère équation.
Ex. 3 : 1. remarquer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ et $f(x) > 0$; 2. résoudre $g(x) = y$ pour $y \in \mathbb{R}$.
Ex. 4 : a) poser $y = 1/x$; b) se ramener à la limite du cours avec $\sqrt{x} = x/\sqrt{x}$; c) "passer" à l'exponentielle et faire le changement $y = \ln(x)$; d) mettre e^{bx} en facteur et se ramener à une limite connue.
Ex. 5 : 1. a) b) prendre le logarithme de chaque membre puis factoriser ; 2. et 3. : utiliser l'exponentielle pour transformer les expressions.
Ex. 6 : faire le quotient et "passer" à l'exponentielle puis utiliser les limites de référence.
Ex. 7 : a) se ramener à $\cos(a) = \cos(b)$; b) se ramener à $\sin(a) = \sin(b)$; c) se ramener à $\tan(a) = \tan(b)$ avec $x \longrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ dans $\tan(x)$.
Ex. 8 : a) faire apparaître $\dfrac{\sin(x)}{x}$; b) $\sin(2x) = ...$; c) mettre e^{-x} en facteur au numérateur
Ex. 9 : a) utiliser $\cos^2 a = \dfrac{1}{1+\tan^2(a)}$; b) utiliser a) et $\cos^2 + \sin^2 = 1$; c) exprimer $\cos(x)$ à l'aide de $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
Ex. 10 : étudier la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arc}\tan(x) + \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
Ex. 11 : déterminer $D_f,\ D_{f'}$ puis calculer $f'(x)$ en simplifiant au maximum et conclure.