

TD n° 5 : Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ **Exercice 1**

Reconnaître parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(2a + b, a + b, a - 2b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}; \quad B = \{(a, b, b - a^2) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$C = \{(a - 1, b + 1, a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 2

Reconnaître parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_n^2 = 0\}$$

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_3 + x_4 = -1\}$$

$$G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| = |x_2|\}$$

Exercice 3

On considère les vecteurs $u = (-4, 4, 3)$, $v = (-3, 2, 1)$, $s = (-1, 2, 2)$ et $t = (-1, 6, 7)$ de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{s, t\}$.

Exercice 4

Soient $E = \{(x + y, x + 2y, x + 3y, x) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et $F = \text{Vect}\{(1, -1, 1, -1)\}$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui engendre E .
- Déterminer $E \cap F$.

Exercice 5

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de E à deux éléments.
- La famille trouvée est-elle libre ?

Exercice 6

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$; justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
En donner une base. Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ le vecteur $u = (1, m, 1)$ est-il dans F ?
Donner alors ses coordonnées dans la base choisie. Pour les autres valeurs de m , que peut-on dire de la famille obtenue en adjoignant u à la base de F ?

Exercice 7

Soit (u_1, u_2, u_3) une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$).

Montrer que $(u_1 + u_2, u_1 + u_3, u_2 + u_3)$ est aussi une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Quelles sont les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (2, -1, 0, 1)$, $v_4 = (-1, 6, 3, 0)$ et $v_5 = (4, -5, -2, 1)$.

Calculer le rang de $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ et donner une base de $E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (3, 2, 1, 4)$, $v = (2, 2, 2, 6)$, $w = (4, 2, 0, 2)$,
 $t = (-1, 0, 1, 2)$ et $s = (0, 3, 2, 1)$.

Soient $E = \text{Vect}\{u, v, w, t, s\}$, $F = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $G = \text{Vect}\{t, s\}$.

- Quelles sont les dimensions de E , F et G ?
- Montrer que $t \in F$ et que $s \notin F$. En déduire la dimension de $F \cap G$.

Indications pour les exercices du TD n° 5

Ex. 1 : vérifier la définition ou exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui engendre l'ensemble ou montrer qu'une des conditions de la définition n'est pas vérifiée à l'aide d'un contre-exemple.

Ex. 2 : idem

Ex. 3 : montrer que s et t sont des combinaisons linéaires de u et v et réciproquement, puis conclure.

Ex. 4 : a) trouver deux vecteurs qui engendrent E ; b) écrire à quelles conditions $(x, y, z, t) \in F$.

Ex. 5 : a) écrire les vecteurs de E comme combinaison linéaire de 2 vecteurs ; b) utiliser la définition.

Ex. 6 : trouver une famille génératrice de F puis vérifier qu'elle est libre ; ok ; écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs de la base ; étudier la liberté de la famille obtenue.

Ex. 7 : utiliser la définition et résoudre le système obtenu.

Ex. 8 : a) vérifier que $\mathcal{B}$ est une famille libre et conclure ; b) écrire chaque e_i comme combinaison linéaire des u_i et déterminer les coefficients en résolvant un système.

Ex. 9 : calculer le rang en utilisant la matrice des coordonnées dans la base canonique, puis, à l'aide des relations trouvées (colonnes nulles), éliminer certains vecteurs de la famille génératrice de départ pour obtenir une famille libre.

Ex. 10 : a) calculer le rang des familles de vecteurs correspondants ; b) montrer qu'on ne peut pas avoir $\dim F \cap G = 2$.

Indications pour les exercices du TD n° 5

Ex. 1 : vérifier la définition ou exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui engendre l'ensemble ou montrer qu'une des conditions de la définition n'est pas vérifiée à l'aide d'un contre-exemple.

Ex. 2 : idem

Ex. 3 : montrer que s et t sont des combinaisons linéaires de u et v et réciproquement, puis conclure.

Ex. 4 : a) trouver deux vecteurs qui engendrent E ; b) écrire à quelles conditions $(x, y, z, t) \in F$.

Ex. 5 : a) écrire les vecteurs de E comme combinaison linéaire de 2 vecteurs ; b) utiliser la définition.

Ex. 6 : trouver une famille génératrice de F puis vérifier qu'elle est libre ; ok ; écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs de la base ; étudier la liberté de la famille obtenue.

Ex. 7 : utiliser la définition et résoudre le système obtenu.

Ex. 8 : a) vérifier que $\mathcal{B}$ est une famille libre et conclure ; b) écrire chaque e_i comme combinaison linéaire des u_i et déterminer les coefficients en résolvant un système.

Ex. 9 : calculer le rang en utilisant la matrice des coordonnées dans la base canonique, puis, à l'aide des relations trouvées (colonnes nulles), éliminer certains vecteurs de la famille génératrice de départ pour obtenir une famille libre.

Ex. 10 : a) calculer le rang des familles de vecteurs correspondants ; b) montrer qu'on ne peut pas avoir $\dim F \cap G = 2$.