DM n° 0**Exercice 1** Les deux questions sont indépendantes

1. a) Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^4 dt$ à l'aide du changement de variable $u = 1 + \frac{1}{t}$.
- b) Calculer $J = \int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} dx$ à l'aide du changement de variable $y = \sqrt{x+1}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$.
 - a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.
 - b) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$ et en déduire la somme de la série précédente.
 - c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (n+1)u_n$ converge et déterminer sa somme.
 - d) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (n^2 - 1)u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Dresser le tableau de variations complet pour f en précisant notamment les limites aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Démontrer que : $\forall t \in [0, +\infty[, 2e^t - t - t^2 > 0$ et $1 + t \geq \sqrt{1+t^2}$.
b. En déduire que : $\forall t \in [0, +\infty[, f(t) > t$.
3. On considère l'application G définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$.
 - a. Montrer que G est une fonction impaire.
 - b. À l'aide d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ dont on justifiera l'existence, montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et expliciter alors $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - c. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
 - d. Dresser le tableau de variations complet pour G sur $\mathbb{R}$ en précisant notamment les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} dx$.

1. Calculer u_1 .
2. a) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x) \cos(x) dx$.
b) Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n . En déduire u_3 .
3. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle est convergente.

4. a) Déterminer un réel $K \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \sin(x) \leq K$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$.

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. a) Utiliser la question précédente pour montrer que la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1 - \sin(x)) \cos(x)} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{(1 - \sin(x)) \cos(x)} dx$.

c) En déduire que la somme S de la série $\sum u_n$ est égale à $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1 - \sin(x)) \cos(x)} dx$.

d) À l'aide du changement de variable $u = \sin(x)$, montrer que $S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1 - u)^2(1 + u)} du$.

e) Déterminer des réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{1}{(1 - u)^2(1 + u)} = \frac{a}{1 - u} + \frac{b}{1 + u} + \frac{c}{(1 - u)^2}.$$

En déduire alors la valeur de S .

ΥΥΥΥΥ