DM n° 0

Exercice 1 Les quatre questions sont indépendantes

1. a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\},\ \dfrac{1}{u(u+1)} = \dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{u+1}$.

b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = t^3$.

2. Justifier que la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arc}\tan(\sqrt{x})$ admet des primitives sur $\mathbb{R}^+$ et les calculer à l'aide du changement de variable $x = u^2$.

3. a) Soit $x \notin]-1, 1[$, justifier que la série $\sum nx^{n-1}$ diverge.

b) Soit $x \in]-1, 1[$, justifier que la série $\sum nx^{n-1}$ est absolument convergente (*on pourra appliquer la règle de d'Alembert en traitant à part le cas où* $x = 0$).

c) Avec le changement d'indice $m = n-1$, montrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $x \in]-1, 1[$.

d) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n+3}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

4. On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2^{\frac{1}{n+1}} u_n$.

a) Montrer que la série de terme général $d_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est divergente.

b) En déduire que la suite (u_n) diverge et déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

c) Reprendre les mêmes questions en remplaçant (u_n) par la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2^{\frac{1}{n!}} v_n$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n\,\mathrm{d}x$ et $Jn = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. a) Dresser le tableau de variations sur $[0, 1]$ de $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2e}}$.

c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} J_{n+1}$.

b) Étudier la convergence des suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln(x) - \dfrac{1}{2}$.

1. a) Étudier les variations de f et ses limites en 0 et $+\infty$, puis déterminer la nature de ses branches infinies.

b) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

c) Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

d) En déduire que $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\dfrac{j}{n}\right)$.

a) Établir, pour tout entier j vérifiant $1 \leqslant j < n$, les inégalités :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

b) En déduire l'encadrement : $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

3. On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ définie précédemment. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n.

c) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

ϒϒϒϒϒ