DM n° 1

Exercice 1

Un urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue des tirages avec le protocole suivant : on tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne et on rajoute une boule de l'autre couleur.

On note pour $k \in \mathbb{N}$, X_k la variable qui donne le nombre de boules blanches dans l'urne avant le $(k+1)$-ème tirage. En particulier on a $X_0 = 1$.

On note B_k l'événement "on tire une boule blanche au k-ème tirage".

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Donner, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X_k.
3. Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$.
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = i-1).$$

5. On définit la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par $a_k = (k+1)!\,\mathbb{P}(X_k = 2)$. Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
6. On définit la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par $b_k = a_k + k + 2$. Montrer que (b_k) est géométrique et donner une expression explicite de $\mathbb{P}(X_k = 2)$

Exercice 2

Soit $k \in \mathbb{N}$. On admet le résultat suivant : $\forall x \in [0, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

Soient dix urnes dont l'une est vide et neuf contiennent une proportion p de boules rouges, $p \in \,]0, 1[$. On joue au jeu suivant : on choisit une urne au hasard, puis on tire une boule indiscernable au toucher que l'on remet dans l'urne ensuite.

Si le joueur choisit l'urne vide, il est disqualifié. Il ne joue pas la manche. Sinon, s'il tire une boule rouge, il gagne 1 euro. S'il ne tire pas une boule rouge, il perd 1 euro. Il rejoue en choisissant à nouveau au hasard une urne. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale nombre de manches jouées (resp. gagnées) et soit G la variable aléatoire égale au gain total du joueur. Soit D_k l'événement "choisir la k-ième urne avant d'être disqualifié".

1. Déterminer la loi de X.
2. Soit $T = X + 1$. Reconnaître la loi de T. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k)$ pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la loi de Y.
4. Exprimer G en fonction de X et Y.
5. Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
6. Retour sur le résultat admis en préambule.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^{n-k}$ est convergente pour tout $x \in [0, 1[$ (sans chercher à calculer sa somme).

b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$. Montrer que :

$$\forall N \geqslant k+1,\ (1-x) \sum_{n=k+1}^{N} \binom{n}{k+1} x^{n-k-1} = \sum_{n=k}^{N-1} \binom{n}{k} x^{n-k} - \binom{N}{k+1} x^{N-k}.$$

c) Démontrer par récurrence sur k le résultat admis en préambule.

Exercice 3

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient λ un réel strictement positif et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ.

1. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Donner la loi de S_n.
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable Y_i par : $\forall \omega \in \Omega,\ Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}$.

   Déterminer la loi de Y_i.
3. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Déterminer la loi de T_n.
4. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{T_n}{n}\right)$ en fonction de λ.
5. On pose : $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = \mathbb{P}_{(S_n = k)}(X_1 = 0)$. Calculer $f(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}\big(f(S_n)\big)$.
7. Démontrer que la variance $V\big(f(S_n)\big)$ est inférieure à $V\left(\dfrac{T_n}{n}\right)$.