DM n° 2

Exercice 1

Pour tout réel a strictement positif, on note $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on appelle f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $A(a)$ dans la base canonique.

1. Déterminer les valeurs propres de f_a. f_a est-il diagonalisable ?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de a, f_a est-il un automorphisme ?

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes bijectifs de E.

1. a) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de $f \circ g$.

   b) Montrer que : λ valeur propre de $f \circ g \iff \lambda$ valeur propre de $g \circ f$.

2. Soit E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de $f \circ g$ et F_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de $g \circ f$.

   a) Montrer que $f(F_\lambda)$ est inclus dans E_λ et $g(E_\lambda)$ est inclus dans F_λ.

   b) En déduire que F_λ et E_λ sont de même dimension.

   c) Montrer que : $f \circ g$ diagonalisable $\iff g \circ f$ diagonalisable.

3. <u>Application</u>

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de M et N.

Les matrices MN et NM sont-elles diagonalisables ?

4. Déterminer deux endomorphismes tels que f et g soient diagonalisables et tels que $f \circ g$ ne soit pas diagonalisable.

5. L'équivalence démontrée en 2. c) reste-t-elle valable si on ne suppose plus que f et g sont bijectifs ?

Exercice 3

On fixe un entier $n \geqslant 2$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ne comporte que des 1 sur la première ligne et la première colonne et des 0 partout ailleurs.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

2. Déterminer les valeurs propres de f et une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est : $P = \dfrac{1}{n-1}(A^2 - A)$.

3. Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de g.

4. Donner les valeurs propres de g et préciser P^2 en fonction de P.

ϒϒϒϒϒ