DS n° 1

(durée : 4 heures)

Exercice 1 (Les quatre questions sont indépendantes)

1. Calculer les intégrales suivantes : a) $I = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{\ln(t)}{t^2}}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \ln(t)$; b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries suivantes :
a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$; b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}$ où $k\in\mathbb{N}$ est fixé.

3. Dans un pays où il naît autant de garçons que de filles, le docteur X prévoit le sexe des enfants à naître. Il se trompe une fois sur dix si c'est un garçon qui naît et une fois sur vingt si c'est une fille. Aujourd'hui, il vient de dire à Mme Y qu'elle aurait une fille. Quelle est la probabilité pour que cela soit vrai ?

4. On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve Mona Lisa. Un doute plane sur l'authenticité de la toile retrouvée. On estime à 80% la probabilité pour que ce soit celle que Léonard a peinte. On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance. Le premier, qui se trompe une fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

Exercice 2 (*Tous les résultats doivent être justifiés et donnés sous forme de fractions simplifiées*)

On lance 5 dés cubiques non truqués de couleurs différentes (rouge, vert, bleu, jaune, noir) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le résultat d'un lancer est noté comme un élément de $[\![1,6]\!]^5$ avec les numéros des faces des 5 dés dans l'ordre des couleurs rouge, vert, bleu, jaune, noir.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité p_1 que les cinq dés amènent le même numéro ?
3. Quelle est la probabilité p_2 que trois dés amènent le même numéro et les autres un même numéro différent du précédent ?
4. Quelle est la probabilité p_3 que les dés amènent cinq entiers consécutifs dans un ordre quelconque ?
5. Quelle est la probabilité p_4 que les cinq entiers obtenus forment une suite strictement croissante ?

Problème 1

1. Rappeler, en fonction du réel α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$.

On note alors $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et, pour tout entier naturel N non nul : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ et $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

2. a) En utilisant la monotonie de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
b) En déduire que pour tout entier naturel N non nul : $\dfrac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \dfrac{1}{N}$.

3. Déterminer un entier naturel N_0 tel que : $\forall N \geqslant N_0,\ |S_N - S| \leqslant 10^{-3}$.

On pose maintenant pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls : $u_n(p) = \dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$.

4. Soit p un entier naturel non nul.
a) Donner un équivalent simple de $u_n(p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n(p)$.

On pose pour tout entier naturel p non nul : $U(p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(p)$.

5. a) Déterminer deux réels a, b vérifiant pour tout entier naturel n non nul : $u_n(1) = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

b) En déduire la valeur de $U(1)$.

6. a) Exprimer, pour tout couple d'entiers naturels (n, p) tel que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$, $u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1)$ en fonction de p et de $u_n(p)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel p non nul : $U(p) = \dfrac{1}{p \times p!}$.

7. a) Montrer, par récurrence sur p, que pour tout entier naturel p non nul, pour tout entier naturel n non nul : $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$.

b) En déduire que pour tout entier naturel p non nul : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}$ converge et que : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + p!\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}$.

Problème 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)(\cos(x))^n \,\mathrm{d}x$.

Le but de ce problème est l'étude de la nature de la série de terme général u_n et le calcul de sa somme.

Partie A.

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle les formules d'Euler : $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.
Montrer, à l'aide de ces formules, que : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

b) En utilisant a) et une intégration par parties, calculer la valeur de u_1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-t)^n}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ n & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

a) Après avoir simplifié son expression, tracer le graphe de la fonction f_2 dans un repère orthonormé.

b) Tracer le graphe de la fonction f_3 dans un repère orthonormé.

c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}t^{k-1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_1, I_2 et I_3.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

e) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4. a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2px)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sin(2px) = 2^n\sin(nx)\big(\cos(x)\big)^n$.

c) Conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}I_n$.

$\hookrightarrow$

Partie B.

5. Soit $x \in [0,1[$. Soit φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \varphi_x(t) = \dfrac{x-t}{1-t}$.

a) Dresser le tableau de variations de φ_x sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en précisant les limites aux bornes.

b) Montrer que : $\forall x \in [0,1[, \forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \varphi_x(t) \leqslant x$.

c) Trouver un réel a tel que : $\forall x \in [0,1[, \forall t \in [0,x],\ \dfrac{\varphi_x(t)}{1-t} = \dfrac{x-1}{(1-t)^2} + \dfrac{a}{1-t}$.

6. Soit h la fonction définie sur $[0,1[$ par : $h(x) = -\ln(1-x)$.

a) Dresser le tableau de variations de h sur $[0,1[$ en précisant les limites aux bornes.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1[,\ h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + R_n(x)$ avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\big(\varphi_x(t)\big)^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1[,\ 0 \leqslant R_n(x) \leqslant -x^n \ln(1-x)$.

d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ converge.

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \in [0,1[,\ (1-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} I_k x^k = h(x) - R_n(x) - I_n x^{n+1}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, la série de terme général $I_k x^k$ converge et que :

$$\forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} I_k x^k = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

c) En déduire la convergence de la série de terme général u_k et calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

$\Xi_\Xi\Xi_\Xi\Xi$