CONCOURS BLANC N° 1

Épreuve de mathématiques

Durée : 4 heures

L'énoncé comporte 3 pages

Aucun instrument de calcul n'est autorisé

Exercice 1

Partie I

Une urne U contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On réalise 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne U. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.

a) Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

b) Donner la valeur de l'espérance de X et de sa variance.

2. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne U successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.

a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.

b) Donner les valeurs de $\mathbb{E}(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II

L'urne U contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne V contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans U, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans V.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

3. Que vaut $T(\Omega)$?

4. Déterminer la loi de T.

5. Calculer $\mathbb{E}(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?

6. Sachant que l'évènement $(T = 1)$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?

Exercice 2

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, "être malade" ou "être donneur compatible"). On fixe $q \in]0, 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de **ne pas** posséder la propriété recherchée. Le résultat d'une analyse est dit **positif** si la propriété est présente, **négatif** si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.

A.1. Recherche de toutes les personnes possédant la propriété.

On veut trouver **toutes** les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geqslant 2$.

Protocole A

On mélange le sang des n personnes et l'on fait une analyse de ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête. S'il est positif, on analyse individuellement le sang de chacune des n personnes.

On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole **A** pour n personnes.

1. a) Pourquoi s'arrête-t-on si le premier résultat est négatif ?

b) Quelles valeurs peut prendre A_n ?

c) Déterminer la loi de A_n.

d) Montrer que l'espérance de A_n est $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.

2. On considère un entier k tel que $1 \leqslant k < n$. Calculer la probabilité conditionnelle que les k premières personnes testées soient toutes négatives, sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

Protocole B

On fait un test pour chacune des n personnes.

3. a) À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole **A** qu'avec le protocole **B** ? *On exprimera le résultat en fonction de n.*

b) Calculer la limite à droite, en 0, de $x \longmapsto x^x$.

c) Justifier que, pour n assez grand, le protocole **B** est préférable au protocole **A**.

A.2. Recherche d'une personne possédant la propriété.

On veut dorénavant trouver **une** personne possédant la propriété recherchée, au sein d'une population que l'on suppose infinie.

Protocole C

On teste toutes les personnes une par une, jusqu'à en trouver une qui possède la propriété.

On note C la variable aléatoire qui indique le rang de la première personne possédant la propriété, c'est-à-dire que $C = j$ si la j-ème personne est la première à posséder la propriété. Ainsi, C compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole **C**. On rappelle que q est la probabilité de ne pas posséder la propriété recherchée et on note $p = 1 - q$ la probabilité de la posséder.

4. a) Donner la loi de C.

b) Donner, sans justification, l'espérance de C.

On va maintenant procéder par regroupement. On fixe un entier $n \geqslant 2$, qui désignera la taille des groupes. Ainsi, le premier groupe contiendra les n premières personnes, le second groupe contiendra les n suivantes, et ainsi de suite.

Protocole D

On mélange le sang des n personnes du premier groupe et on le teste. Si le résultat est négatif, on procède de façon similaire avec le groupe suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un test positif. On teste ensuite une par une les personnes du groupe dont le test est positif, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété.

On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc.

5. Soit k un entier strictement positif.

a) Exprimer l'évènement $\{G > k\}$ en fonction de la variable aléatoire C, introduite en préambule de la question 4.

b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(G > k)$.

c) Reconnaître la loi de G.

On note X la variable aléatoire représentant le numéro de la première personne à avoir un test positif au sein de son groupe. Par exemple, si c'est la cinquième personne du second groupe qui donne le premier test positif, cela signifie que $G = 2$ et $X = 5$.

6. a) Quelles valeurs peut prendre X ?

b) Pour $k \geqslant 1$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = i \mid G = k)$.

c) Calculer la limite de cette quantité lorsque $q \to 1$.

d) Montrer que X est indépendante de G.

e) Montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}$.

7. On note D le nombre de tests effectués avec le protocole **D**.

a) Exprimer, en fonction des valeurs prises par G et par X, l'évènement $\{D = 3\}$.

b) Trouver une relation entre D, G et X.

c) Soit un entier $j \geqslant 1$. Montrer que $\mathbb{P}(D = j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}\big(C = (k-1)n + j - k\big)$.

↪

8. a) Calculer $\mathbb{E}(D)$.

b) À n fixé, calculer la limite du quotient $\dfrac{\mathbb{E}(D)}{\mathbb{E}(C)}$ lorsque $q \to 1$. Interpréter ce résultat.

Exercice 3

1. Soit $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $s \longmapsto \dfrac{1}{(1-s)^2}$

a) Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes.

b) Calculer l'équation de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f en $s = \dfrac{1}{2}$.

c) Représenter sur une même figure Δ et $\mathcal{C}$ en prenant une unité assez grande sur l'axe des abscisses.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1-s)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} i s^{i-1} \right) = 1 - s^n(1+n-sn).$$

3. a) Montrer que si $|s| \geqslant 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} i s^{i-1}$ diverge.

b) Montrer que si $|s| < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} i s^{i-1}$ converge et $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i s^{i-1} = \frac{1}{(1-s)^2}$.

4. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

a) Quelle loi connue suit la variable X ? Donner son espérance et sa variance.

b) Montrer que $e^{-\lambda X}$ admet une espérance si, et seulement si, $\lambda > -\ln(2)$, et la calculer.

c) Montrer que, si $\lambda > -\ln(2)$, $Xe^{-\lambda X}$ admet une espérance et la calculer.

5. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ une fonction dérivable.

a) Montrer que la fonction h définie par $h(s) = \dfrac{1}{1-g(s)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a : $h'(s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i g'(s)\, g(s)^{i-1}$.

6. a) Soit $0 < x < 2$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} i(1-x)^{2i}$ converge.

b) Pour $0 < x < 2$, on pose : $t(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i(1-x)^{2i}$

Trouver la limite de $x^2 t(x)$ lorsque $x \to 0$.

$\Xi_{\Xi}\Xi_{\Xi}\Xi$