DS n° 3
(durée : 4 heures)

Exercice 1

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$. On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q. On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule rouge. On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note R_i (resp. V_i) l'événement : "le i-ième tirage amène une boule rouge (resp. verte)". Ainsi, on a : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(R_i) = p$ et $\mathbb{P}(Vi) = q$.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la première boule rouge et on pose $Z = -1$ si l'on n'obtient jamais une boule rouge.

1. a) Préciser $Z(\Omega)$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(Z = n) = pq^n$.

   b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n)$ et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(Z = -1)$.

2. a) Montrer que la variable aléatoire $Z + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

   b) En déduire que Z admet une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{q}{p}$.

   c) En déduire que Z admet une variance et préciser sa valeur.

3. Désormais on fait des tirages dans l'urne avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne deux boules rouges et Z désigne maintenant le nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la deuxième boule rouge. On pose $Z = -1$ si l'on n'obtient jamais une deuxième boule rouge et on admet que $\mathbb{P}(Z = -1) = 0$. On introduit alors les variables aléatoires X_1 et X_2 prenant pour valeurs respectives les rangs d'apparition de la première et de la deuxième boule rouge.

   a) Reconnaître la loi de X_1.

   b) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

   c) En déduire la loi marginale de X_2, puis déterminer son espérance.

   d) Quelle relation relie Z et X_2 ? En déduire l'espérance de Z.

   e) On pose $D = X_2 - X_1$. Quelle est la loi de D ? En déduire les variances de X_2 et Z.

Exercice 2

On considère le polynôme $P : x \longmapsto x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6$

1. On se propose de démontrer que P n'a pas de racine double.

   a) Effectuer la division euclidienne de $2P$ par $\frac{1}{2}P'$ où P' est le polynôme dérivé de P. On note R le reste de cette division.

   b) Effectuer alors la division euclidienne de $\frac{1}{2}P'$ par R. On note T le reste de cette division.

   c) Démontrer que si a est une racine double de P, alors a est racine de R et T.

   d) Démontrer que P n'a pas de racine double.

2. On se propose de déterminer les racines de P.

   a) On pose $x = y+1$ et $Q(y) = P(y+1)$. Calculer $Q(y)$ en l'ordonnant suivant les puissances décroissantes de y.

   b) Calculer les racines réelles ou complexes de Q. En déduire les racines réelles ou complexes de P.

   c) En déduire une factorisation de P comme produit de polynômes réels, de degré 1 ou de degré 2 sans racine réelle.

Exercice 3

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que -1 est une valeur propre de A et trouver un vecteur propre, noté V, associé à cette valeur propre.

b) Montrer que (V, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette base.

c) Montrer que si X est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, alors $f(X)$ est une combinaison linéaire de X et de V. En déduire que, dans toute base de $\mathbb{R}^3$ de la forme (V, V_2, V_3), où V_2 et V_3 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est de la forme : $\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Plus généralement, soit U_1 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant la propriété suivante :

(P) Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, $h(X)$ est une combinaison linéaire de X et de U_1.

Soit (U_1, U_2, U_3) une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en adjoignant à U_1 deux autres vecteurs U_2 et U_3.

a) En appliquant la propriété (P) à trois vecteurs particuliers, montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que :

$$h(U_2) = \alpha U_1 + \gamma U_2 \quad \text{et} \quad h(U_3) = \beta U_1 + \gamma U_3.$$

b) En déduire que la matrice de h dans la base (U_1, U_2, U_3) est de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où λ est un réel.

c) L'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

Exercice 4

Partie I Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A$ et $B^2 = B$ en détaillant les calculs.

2. Déterminer le rang de A ainsi que la dimension du noyau de A.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. En notant I_2 la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $I_2 - AB$ et que $A + B - AB$ sont inversibles.

* * *

Partie II Dans cette partie, on étudie quelques propriétés générales des projecteurs. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur. On lui associe l'endomorphisme $\hat{u}$ défini par $\hat{u} = \mathrm{Id} - u$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

5. Montrer que $\hat{u}$ est un projecteur.

6. Démontrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

7. Montrer que $\mathrm{Ker}(\hat{u}) = \mathrm{Im}(u)$ et que $\mathrm{Im}(\hat{u}) = \mathrm{Ker}(u)$.

8. Montrer que $u + \sqrt{2024}\,\mathrm{Id}$ est diagonalisable.

* * *

↪

Soient $p, q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ deux projecteurs. Le but de la suite de l'exercice est de démontrer que :
$p - q$ est inversible (i.e. bijectif) $\iff \mathrm{Id} - p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont inversibles
$\iff \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n$.

Partie III

9. On suppose que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n$.
Montrer que $p - q$ est inversible.

Partie IV On suppose dans cette partie que $p - q$ est inversible.

10. Montrer que $\mathrm{Id} - p \circ q$ est inversible. (*Indication* : on pourra prendre $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p \circ q)$ et calculer $(p - q)^2(x)$ i.e $(p - q) \circ (p - q)(x)$).

11. Posons $\hat{p} = \mathrm{Id} - p$ et $\hat{q} = \mathrm{Id} - q$. Justifier que $\hat{p} - \hat{q}$ est inversible.

12. En déduire que $p + q - p \circ q$ est inversible.

Partie V On suppose dans cette partie que $\mathrm{Id} - p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont inversibles.

13. Justifier qu'il existe $z \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Id} = z \circ p + z \circ (\mathrm{Id} - p) \circ q$.

14. En déduire que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

15. Montrer que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$.

16. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = \mathbb{R}^n$.

$\Xi\Xi\Xi\Xi\Xi$