

DS n° 5
(durée : 4 heures)

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et on pose $u = (1, 2, 2)$, $v = (-1, 4, 1)$ et $w = (2, 1, -2)$.

1. Vérifier que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Est-elle orthonormée ?
2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ contenant deux vecteurs colinéaires l'un à u et l'autre à w .
3. On note $F = \text{Vect}\{u, v\}$. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. Déterminer la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur F (qu'on notera p).
5. Calculer la distance de w à F et à $F^\perp$.

Exercice 2

On désigne par c un réel strictement supérieur à 2 et on suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie 1 : Étude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [1, +\infty[$, de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c .

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3. Montrer que : $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

4. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x , exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F .

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Partie 2 : Produit de deux variables suivant la loi de Pareto de paramètre c

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes les deux la loi de Pareto de paramètre c . On pose $Y_1 = \ln(X_1)$, $Y_2 = \ln(X_2)$ et $Z = X_1 X_2$.

5. Déterminer l'espérance et le moment d'ordre 2 de Z puis vérifier que la variance de Z est donnée

par : $V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c - 2)^2(c - 1)^4}$.

6. a) Donner la loi commune suivie par cY_1 et cY_2 .

b) Soit g une densité de cY_1 et cY_2 . On admet qu'une densité de $cY_1 + cY_2$ est la fonction k définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g(x - t) dt$. Déterminer k .

7. a) Soit H la fonction de répartition de $Y_1 + Y_2$ et K celle de $cY_1 + cY_2$.

Pour tout réel x , exprimer $H(x)$ à l'aide de K , puis vérifier qu'une densité de $Y_1 + Y_2$ est la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z . Exprimer, pour tout réel x , $F_Z(x)$ à l'aide de H . En déduire qu'une densité f_Z de Z est donnée par : $f_Z(x) = \begin{cases} \frac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

8. a) Pour tout réel a strictement supérieur à 1, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} dx$ converge et donner sa valeur.

b) Retrouver alors les valeurs de $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$ déterminées à la question 5.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. Étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}^3$.

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\text{Im}(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est **stable** par f i.e. vérifie $f(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.

2. Étude d'un deuxième exemple dans $\mathbb{R}^3$.

On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $f(u)$ où $u = (1, 1, 1)$ et déterminer le rang de $f - \text{Id}$. En déduire le spectre de f .

b) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f .

c) Calculer la distance du vecteur u au sous-espace $\text{Ker}(f - \text{Id})$, puis préciser $(\text{Ker}(f - \text{Id}))^\perp$.

Dans toute la suite on se place dans $\mathbb{R}^n$, et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ qui possède au moins une valeur propre réelle λ et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ stable par f .

3. On note f^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

4. a) Montrer que λ est valeur propre de f^* .

b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ , et on pose :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \langle x, u \rangle$$

i. Montrer que φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

ii. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, stable par f .

5. On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle g(x), y \rangle = -\langle x, g(y) \rangle$ (on dit que g est *antisymétrique*).

a) Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, g(x) \rangle = 0$, puis $\text{Im}(g) = (\text{Ker}(g))^\perp$ et $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(g^2)$ où $g^2 = g \circ g$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par g . Montrer que $F^\perp$ est stable par g .

c) Montrer que le spectre de g est soit vide soit réduit à $\{0\}$. g est-il diagonalisable ?

d) Montrer que les valeurs propres de g^2 sont négatives.

e) Montrer que la matrice A de g dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique.

f) Montrer qu'en réunissant une base orthonormale de $\text{Ker}(g)$ et une base orthonormale de $\text{Im}(g)$ on obtient une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ et donner la forme de la matrice A' de g dans cette base.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Déterminer des réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$

b) En déduire la valeur de I_1 .

3. a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n .

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.

a) Montrer que J_n est une intégrale convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer J_0 .

6. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k .

b) Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de J_n .

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

$$\Xi \Xi \Xi \Xi \Xi$$