# TD n° 10 : Développements limités

**Exercice 1**

Écrire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 (de 1 pour e)) de :

a) $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ b) $g(x) = e^x + \sin(x) - \dfrac{x^2}{2}$ c) $h(x) = (\cos(x) - 1)^2$

d) $k(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ e) $\ell(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

**Exercice 2**

Écrire un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de :

a) $f(x) = e^x \cos(x)$ ; b) $g(x) = (\sin(x))^2(\sqrt{1+x} - 1)$ ; c) $h(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

**Exercice 3**

Écrire un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 (de 2 pour b)) de :
a) $f(x) = e^{e^x}$ $(n = 2)$ ; b) $g(x) = \ln(3 - x + \sqrt{2x-3})$ $(n = 3)$ ; c) $h(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}$ $(n = 3)$ ; d) $i(x) = \text{Arc}\tan(x)$ $(n = 2)$.

**Exercice 4**

Déterminer $a$ et $b$ pour que $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{a}{\ln(1+x)} + \dfrac{b}{e^x - 1}$ tende vers 0 quand $x$ tend vers 0.
Donner alors un équivalent de $f(x)$ en 0.

**Exercice 5**

Déterminer : a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$ ; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x)}{\cos(x) + \sin(x) - e^x}$.

**Exercice 6**

1. Soit $I$ un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $f'$ admette un $DL_n(0)$ $(n \in \mathbb{N})$. Montrer que $f$ admet un $DL_{n+1}(0)$ et en déterminer la partie régulière à l'aide de celle du $DL_n(0)$ de $f'$.
2. Application : Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0 de $\text{Arc}\tan x$.

**Exercice 7**

En développant $g(X) = f\left(\dfrac{1}{X}\right)$ au voisinage de 0, étudier les branches infinies de

$f : x \longmapsto \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ et de $g : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

**Exercice 8**

a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $\varphi$ définie par :

$$\forall t > 0,\ \varphi(t) = e^t\sqrt{1+2t}.$$

b) Étudier les branches infinies de la fonction $f$ définie par : $f(x) = \sqrt{x(x+2)}\ e^{\frac{1}{x}}$.

## ∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 10 ▶∼

Ex. 1 : a) développer et ordonner ; b) et d) utiliser les DL connus ; c) donner un équivalent et conclure ; e) poser $y = x - 1$.
Ex. 2 : utiliser les DL connus et faire les produits.
Ex. 3 : composer les DL connus, après avoir posé $y = x - 2$ pour b) et utiliser Taylor-Young pour d).
Ex. 4 : commencer par écrire un $DL_3(0)$ de $xf(x)$ puis déterminer $a$ et $b$.
Ex. 5 : utiliser des DL du numérateur et du dénominateur pour trouver un équivalent.
Ex. 6 : 1. intégrer le $DL_n(0)$ de $f$ et montrer que $\displaystyle\int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = o(x^{n+1})\ \ (V_0)$ à l'aide d'un encadrement de $\varepsilon$ sur $[0, x]$ ; 2. utiliser le $DL_{2n}(0)$ de $\operatorname{Arc}\tan'(x)$.
Ex. 7 : faire les DL de $g(X)$ puis revenir à $f(x)$.
Ex. 8 : a) ok ; b) utiliser $\varphi$ pour développer $f\left(\dfrac{1}{X}\right)$ au voisinage de 0.

## ∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 10 ▶∼

Ex. 1 : a) développer et ordonner ; b) et d) utiliser les DL connus ; c) donner un équivalent et conclure ; e) poser $y = x - 1$.
Ex. 2 : utiliser les DL connus et faire les produits.
Ex. 3 : composer les DL connus, après avoir posé $y = x - 2$ pour b) et utiliser Taylor-Young pour d).
Ex. 4 : commencer par écrire un $DL_3(0)$ de $xf(x)$ puis déterminer $a$ et $b$.
Ex. 5 : utiliser des DL du numérateur et du dénominateur pour trouver un équivalent.
Ex. 6 : 1. intégrer le $DL_n(0)$ de $f$ et montrer que $\displaystyle\int_0^x t^n \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = o(x^{n+1})\ \ (V_0)$ à l'aide d'un encadrement de $\varepsilon$ sur $[0, x]$ ; 2. utiliser le $DL_{2n}(0)$ de $\operatorname{Arc}\tan'(x)$.
Ex. 7 : faire les DL de $g(X)$ puis revenir à $f(x)$.
Ex. 8 : a) ok ; b) utiliser $\varphi$ pour développer $f\left(\dfrac{1}{X}\right)$ au voisinage de 0.