TD n° 11 : Intégrales généralisées

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,; \quad I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}\,; \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\,; \quad I_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

Exercice 2

Étudier la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur en cas de convergence :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\,; \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\,; \quad K = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t;\ I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t^\alpha)} \quad (\alpha > 0);\ I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\ln^5(x)};\ I_4 = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4

Soit Γ la fonction réelle définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de Γ.

b) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

Soit $J =]-1,+\infty[$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in J$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
3. Montrer que : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. a) Montrer que : $x \leqslant y \Longrightarrow t^x \geqslant t^y$ pour tout $t \in]0,1]$.
   b) En déduire que f est décroissante.
5. Montrer que : $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 6 (*Ensae-Ensai-Cachan 2016*)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!2^n} x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = I_n$. En déduire la valeur de I_n

Exercice 7 (*Ensae-Paris Saclay 2021*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que les intégrales I_n et J_n sont bien convergentes pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $I_n + J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$, calculer I_n et J_n.
4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$?
   a) La suite (K_n) est-elle convergente ?
   b) La série $\sum K_n$ est-elle convergente ?

Exercice 8 (*Ensae-Paris Saclay 2021*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(t) = \dfrac{t^2}{e^t - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note encore f cette fonction prolongée.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \neq 0,\ f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} t^2 e^{-kt} + \frac{t^2 e^{-(n+1)t}}{e^t - 1}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sous forme de la somme d'une série convergente.

~◀ Indications pour les exercices du TD n° 11 ▶~

Ex. 1 : utiliser pour I_1 le prolongement par continuité de la fonction intégrée, pour I_2, I_3 des primitives et pour I_4 utiliser la limite en 0 et un équivalent en 1.
Ex. 2 : pour I : I.P.P. ; pour J et K : changements de variable $t = \tan(u)$ et $t = u^2$.
Ex. 3 : pour I_1, majorer la fonction par e^{-t} ; pour I_2 et I_4 utiliser un équivalent ; pour I_3 comparaison avec une intégrale de Riemann.
Ex. 4 : a) prendre un équivalent en 0 ; en $+\infty$, comparer avec $1/t^2$; b) I.P.P. ; c) récurrence.
Ex. 5 : 1. utiliser un équivalent en 0 ; 2. ok ; 3 encadrer d'abord la fonction sous l'intégrale ; 4. a) $t^x = e^{x \ln t}$... ; b) intégrer l'inégalité ; 5. la somme des intégrales convergentes est l'intégrale de la somme.
Ex. 6 : a) comparaison avec $1/x^2$ ou $e^{-x/4}$; b) I.P.P. dans une intégrale classique puis passage à la limite. Calculer I_1 pour conclure.
Ex. 7 : 1. équivalents et intégrales de Riemann ; 2. linéarité et simplification ; 3. montrer que $I_n = J_n$ puis utiliser 2. ; 4. a) montrer que (K_n) décroît et est minorée ; b) minorer K_n en majorant le dénominateur de la fonction intégrée puis comparer à une série de Riemann.
Ex. 8 : 1. th. d'op. sur $\mathbb{R}^*$ et équivalent usuel de $\exp$ pour la limite en 0 ; 2. critère de comparaison en comparant f à $\dfrac{1}{t^2}$; 3. calculer la somme à droite avec une suite géométrique ; 4. utiliser 3. et la linéarité de l'intégrale en faisant des I.P.P. sur des intégrales classiques, puis passer à la limite ; justifier que f est bornée pour majorer l'intégrale restante et montrer qu'elle tend vers 0 quand $n \to +\infty$.