

TD n° 4 : Variables aléatoires discrètes (2)**Exercice 1**

A joue à pile ou face avec une pièce biaisée qu'il lance n fois ($n \in \mathbb{N}^*$). On note p ($p \in]0, 1[$) la probabilité d'avoir pile sur cette pièce. On désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de lancers gagnants pour A. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance mathématique dans chacune des hypothèses suivantes :

- Avant le jeu, A choisit "pile" avec une probabilité α ($\alpha \in]0, 1[$) et "face" avec la probabilité $1 - \alpha$.
- A choisit "pile" ou "face" avant chaque jet (il peut donc modifier son pari au fur et à mesure des lancers).

Exercice 2

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, les deux éventualités sont notées E et S. La probabilité d'obtenir un succès lors d'une épreuve est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire discrète qui prend la valeur n si et seulement si on obtient pour la première fois la succession "S,E", S étant obtenu à la $(n - 1)$ -ième épreuve et E à la n -ième.

Déterminer la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3

Un joueur lance n fois un dé honnête. À chaque lancer, il gagne la valeur du numéro obtenu si celui-ci est pair et il la perd si le numéro est impair. Soit X_k le nombre de fois où le numéro k est obtenu ($k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$). On note G le gain du joueur. Déterminer la loi des variables X_k . Exprimer G à l'aide de $X_1, X_2, \dots, X_6$, et en déduire l'espérance de gain du joueur.

Exercice 4

Une urne U_1 contient n jetons numérotés de 0 à $n - 1$. Une urne U_2 contient n boules numérotées de 1 à n . Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : chaque joueur tire à tour de rôle :

- tout d'abord un jeton dans l'urne U_1 et le remet,
- puis une boule dans l'urne U_2 et la remet.

C'est A qui commence. Le gagnant est le premier joueur qui a tiré un numéro de boule strictement supérieur au numéro du jeton tiré juste avant. X désigne la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'il y ait un gagnant.

- Déterminer la loi de X . Calculer son espérance.
- Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

- Montrer que $\mathbb{P}(X = k - 1) = \mathbb{P}(X = k) \iff k = np + p$.
- En déduire qu'un entier m tel que $\mathbb{P}(X = m)$ soit maximum est $m = \lfloor np + p \rfloor$.
- Montrer que si $np + p \in \mathbb{N}$, m admet deux valeurs distinctes que l'on donnera.
- Donner les valeurs de m pour la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ avec n impair.
- On répartit au hasard 60 élèves en 5 classes. Quelle est la valeur la plus probable pour le nombre d'élèves dans la classe n° 1 ?

Exercice 6

Un bureau de poste est composé de deux guichets. Chaque personne choisit le premier guichet avec la probabilité p , et le deuxième avec la probabilité $q = 1 - p$. On considère que leurs choix sont indépendants. On admet que la variable X , représentant le nombre de personnes se présentant au bureau de poste, suit la loi de Poisson de paramètre m .

- Soit Y la variable représentant le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet. Calculer la probabilité de l'événement $(Y = k)$, sachant que n personnes se sont présentées au bureau de poste.
- En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) .
- Déterminer la loi de Y .

Exercice 7

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ respectivement. On note $S = X_1 + X_2$.

Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant $S = k$ ($k \in \mathbb{N}$) ?

Exercice 8

On lance trois dés (équilibrés et discernables) à six faces jusqu'à obtenir trois 6, sachant que dès qu'un dé tombe sur 6, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un 6. On note X_1 (resp. X_2 et X_3) le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 sur le premier (resp. le second et le troisième) dé.

1. Justifier que les variables X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes. Quelles sont leurs lois ? Donner leurs espérances et leurs variances.

2. Soit $Y = \min(X_1, X_2, X_3)$ le nombre de lancers minimum avant d'obtenir au moins un 6. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq k)$. Quelle est la loi de Y ? Calculer son espérance.

3. Soit $X = \max(X_1, X_2, X_3)$ le nombre de lancers avant d'obtenir les trois 6. Calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$.

Calculer son espérance (on pourra utiliser la formule $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > i)$ et on ne cherchera pas à simplifier les fractions obtenues).

~◀ INDICATIONS POUR LES EXERCICES DU TD N° 4 ▶~

Ex. 1 : a) probabilités totales et reconnaître les lois conditionnelles de X dans chaque cas ; b) calculer la probabilité de gagner à chaque lancer puis utiliser la loi binomiale.

Ex. 2 : a) décomposer l'événement $(X = n)$ en une réunion disjointe ; b) utiliser les résultats sur l'espérance d'une loi géométrique.

Ex. 3 : loi binomiale et linéarité de l'espérance.

Ex. 4 : a) loi géométrique dont le paramètre est la probabilité de l'événement "le numéro de la boule est strictement supérieur à celui du jeton" qu'on décompose en une réunion disjointe d'intersections d'événements indépendants ; b) A gagne ssi X prend une valeur impaire.

Ex. 5 : 1. ok ; 2. vérifier que la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est croissante jusqu'à m puis décroissante ; 3. utiliser 1. ; 4. calculer m à partir de 3. ; 5. trouver la loi du nombre d'élèves dans la classe n° 1.

Ex. 6 : 1. loi binomiale ; 2. probabilités composées ; 3. loi marginale à partir de la loi conjointe.

Ex. 7 : utiliser le résultat sur la somme de deux variables de Poisson indépendantes.

Ex. 8 : 1. ok ; temps d'attente... ; 2. $\mathbb{P}(Y \leq k) = 1 - \mathbb{P}(Y > k)$... et $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k - 1)$; 3. ok