TD n° 8 : Réduction des endomorphismes (2)

Exercice 1

Dire, sans calcul, si les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.
Déterminer (sans calculs) le rang de f, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que f est diagonalisable.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et soit u un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 4 (*Ulm, Ensae*)

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si ses coefficients sont positifs et si, sur chaque ligne, leur somme vaut 1.

1. Cas $n = 2$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $(p, q) \in [0,1]^2$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M en fonction de p et q.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

c) Pour quelles valeurs réelles λ existe-t-il une matrice stochastique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant λ pour valeur propre ?

2. Cas général. Montrer que si M est stochastique et si λ est une valeur propre réelle de M, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $BA = AB$.

a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

b) Montrer que $P^{-1}BP$ est diagonale.

3. Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$.

Exercice 6

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB^2 - B^2A = B$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1, kB^{2k-1} = AB^{2k} - B^{2k}A$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = ABM - MBA$.
Si $B^{2k-1} \neq 0$, montrer que B^{2k-1} est un vecteur propre de f et donner la valeur propre associée.

3. Montrer qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $B^m = 0$, et que le plus petit entier vérifiant cette égalité est impair.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$.

b) Montrer que : $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 8 ▶∼

Ex. 1 : regarder la diagonale.
Ex. 2 : regarder les colonnes de A.
Ex. 3 : utiliser une base de vecteurs propres de u et distinguer les cas où 0 est valeur propre ou non.
Ex. 4 : 1. a) le discriminant de l'équation du 2nd degré est un carré... ; b) discuter selon que $p-q=1$ ou non ; c) utiliser a) pour trouver la condition nécessaire et vérifier qu'elle est suffisante en choisissant des matrices particulières ; 2. considérer un vecteur propre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associé à λ et utiliser $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
Ex. 5 : 1) diagonaliser A ; 2)a) utiliser les définitions et les résultats du 1) ; b) utiliser les vecteurs propres de A pour diagonaliser B ; 3) montrer que $P^{-1}MP$ est diagonale et en déduire les solutions.
Ex. 6 : 1. récurrence sur k en utilisant $AB^2 = B + B^2A$ ou $B^2A = AB^2 - B$; 2. calculer $f(B^{2k-1})$; 3. f est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie donc... puis utiliser 1. pour montrer que le plus petit m ne peut pas être pair.
Ex. 7 : a) une matrice et sa transposée ont même rang ; b) considérer une valeur propre λ de AB et un vecteur propre X associé puis montrer que BX est vecteur propre de BA ou que $\lambda = 0$ est valeur propre de BA.

∼◀ Indications pour les exercices du TD n° 8 ▶∼

Ex. 1 : regarder la diagonale.
Ex. 2 : regarder les colonnes de A.
Ex. 3 : utiliser une base de vecteurs propres de u et distinguer les cas où 0 est valeur propre ou non.
Ex. 4 : 1. a) le discriminant de l'équation du 2nd degré est un carré... ; b) discuter selon que $p-q=1$ ou non ; c) utiliser a) pour trouver la condition nécessaire et vérifier qu'elle est suffisante en choisissant des matrices particulières ; 2. considérer un vecteur propre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associé à λ et utiliser $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
Ex. 5 : 1) diagonaliser A ; 2)a) utiliser les définitions et les résultats du 1) ; b) utiliser les vecteurs propres de A pour diagonaliser B ; 3) montrer que $P^{-1}MP$ est diagonale et en déduire les solutions.
Ex. 6 : 1. récurrence sur k en utilisant $AB^2 = B + B^2A$ ou $B^2A = AB^2 - B$; 2. calculer $f(B^{2k-1})$; 3. f est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie donc... puis utiliser 1. pour montrer que le plus petit m ne peut pas être pair.
Ex. 7 : a) une matrice et sa transposée ont même rang ; b) considérer une valeur propre λ de AB et un vecteur propre X associé puis montrer que BX est vecteur propre de BA ou que $\lambda = 0$ est valeur propre de BA.